



BENEMÉRITA Y CENTENARIA ESCUELA NORMAL DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ.

TITULO: Suma y resta de fracciones: un tránsito de la matematización horizontal a la vertical en estudiantes de tercer grado de primaria

AUTOR: Itzel Guadalupe Jasso Rocha

FECHA: 7/15/2026

PALABRAS CLAVE: Educación matemática realista, Matematización horizontal y vertical, Suma y resta de fracciones, Educación primaria

**SECRETARIA DE EDUCACIÓN DE GOBIERNO DEL ESTADO
SISTEMA EDUCATIVO ESTATAL REGULAR
DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN
INSPECCIÓN DE EDUCACIÓN NORMAL**

**BENEMÉRITA Y CENTENARIA
ESCUELA NORMAL DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ**

GENERACIÓN

2022



2026

**“SUMA Y RESTA DE FRACCIONES: UN TRÁNSITO DE LA MATEMATIZACIÓN
HORIZONTAL A LA VERTICAL EN ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE
PRIMARIA”**

**TESIS DE INVESTIGACIÓN
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA EN EDUCACIÓN PRIMARIA**

PRESENTA:

ITZEL GUADALUPE JASSO ROCHA

ASESORA:

DRA. FLOR NAELA AHUMADA GARCÍA

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P.

JULIO DE 2026



**BENEMÉRITA Y CENTENARIA ESCUELA NORMAL DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ
CENTRO DE INFORMACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA**

**ACUERDO DE AUTORIZACIÓN PARA USO DE INFORMACIÓN DEL DOCUMENTO
RECEPCIONAL EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA BECENE DE ACUERDO A LA
POLÍTICA DE PROPIEDAD INTELECTUAL**

**A quien corresponda.
PRESENTE. –**

Por medio del presente escrito Itzel Guadalupe Jasso Rocha
autorizo a la Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí, (BECENE) la
utilización de la obra Titulada:

**SUMA Y RESTA DE FRACCIONES: UN TRÁNSITO DE LA MATEMATIZACIÓN HORIZONTAL A LA
VERTICAL EN ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE PRIMARIA**

en la modalidad de: Tesis

☒ para obtener el

Título en ☐ Licenciatura en Educación Primaria ☐

en la generación 2022-2026 para su divulgación, y preservación en cualquier medio, incluido el
electrónico y como parte del Repositorio Institucional de Acceso Abierto de la BECENE con fines
educativos y Académicos, así como la difusión entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras
personas, sin que pueda percibir ninguna retribución económica.

Por medio de este acuerdo deseo expresar que es una autorización voluntaria y gratuita y en
atención a lo señalado en los artículos 21 y 27 de Ley Federal del Derecho de Autor, la BECENE
cuenta con mi autorización para la utilización de la información antes señalada estableciendo que se
utilizará única y exclusivamente para los fines antes señalados.

La utilización de la información será durante el tiempo que sea pertinente bajo los términos de los
párrafos anteriores, finalmente manifiesto que cuento con las facultades y los derechos
correspondientes para otorgar la presente autorización, por ser de mi autoría la obra.

Por lo anterior deslindo a la BECENE de cualquier responsabilidad concerniente a lo establecido en
la presente autorización.

Para que así conste por mi libre voluntad firmo el presente.

En la Ciudad de San Luis Potosí. S.L.P. a los 07 días del mes de julio de 2026.

ATENTAMENTE.

Itzel Guadalupe Jasso Rocha

Nombre y Firma

AUTOR DUEÑO DE LOS DERECHOS PATRIMONIALES

BECENE-SA-DSE-RT-PO-01-05

Revisión 2

Administrativa

Dictamen Aprobatorio del
Documento Recepcional

San Luis Potosí, S.L.P.; a 24 de Junio del 2026

Los que suscriben, tienen a bien

DICTAMINAR

que el(la) alumno(a): C. JASSO ROCHA ITZEL GUADALUPE
De la Generación: 2022 - 2026

concluyó en forma satisfactoria y conforme a las indicaciones señaladas en el Documento Recepcional en la modalidad de () Ensayo Pedagógico, () Informe de Prácticas Profesionales, () Portafolio Temático, (X) Tesis de Investigación, () Tesina, () Portafolio de Evidencias.

Titulado:

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES: UN TRÁNSITO DE LA MATEMATIZACIÓN HORIZONTAL A LA VERTICAL EN ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE PRIMARIA

Por lo anterior, se determina que reúne los requisitos para proceder a sustentar el Examen Profesional que establecen las normas correspondientes, con el propósito de obtener el Título de Licenciado(a) en EDUCACIÓN PRIMARIA

ATENTAMENTE COMISIÓN DE TITULACIÓN

DIRECTORA ACADÉMICA



DIRECTORA DE SERVICIOS ADMINISTRATIVOS

MTRA. WANEY COVARRUBIAS CERVANTES

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
SISTEMA EDUCATIVO ESTATAL REGULAR
BENEMÉRITA Y CENTENARIA
ESCUELA NORMAL DEL ESTADO
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

MTRA. FÁTIMA GUADALUPE FABIÁN VANEGAS

RESPONSABLE DE TITULACIÓN

ASESOR DEL DOCUMENTO RECEPCIONAL

MTRD. GERARDO JAVIER GUEL CABRERA

DRA. FLOR NAELA AHUMADA GARCIA



Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi casa de estudios por haber sido el espacio donde me formé, donde crecí a lo largo de estos cuatro años y donde comenzó formalmente mi camino en la docencia.

A mi mamá, María Guadalupe, porque ella me dio el estudio y pagó cada paso de mi carrera. Gracias por todo el esfuerzo que has hecho para que yo esté hoy aquí, porque detrás de cualquier éxito mío siempre estás tú.

A mi hermana, Verónica, que se desveló conmigo tantas noches para ayudarme con mi material didáctico, sin ella no lo hubiera logrado. En estos cuatro años, y en los dieciséis anteriores, siempre has sido un pilar a seguir y te admiro muchísimo.

A mi tía, María del Rosario, le agradezco su apoyo incondicional en lo personal. Si yo necesitaba algo, ella lo conseguía. Nunca voy a olvidar cómo me cuidaste y te agradezco por estar con nosotros en cada paso.

A mi hermano, Samael Abraham, por estar ahí siempre, dándome dolores de cabeza o aligerando el ambiente con una broma cuando el estrés me ganaba. A pesar de todo, eres alguien muy importante para mí.

A mis abuelos, María Luisa y Exequiel, quienes ya no están conmigo, pero me vieron crecer, quiero decirles que donde quiera que estén los llevaré siempre conmigo. Son parte de mi vida y espero que este logro, y todos los que vienen, los hagan muy felices y los llenen de orgullo.

A mi asesora de tesis, la Dra. Flor Naela, le agradezco profundamente por nunca dejarme caer y por ayudarme a crecer tanto en lo personal como en lo profesional. Me llevo grandes enseñanzas de usted. Fue un pilar fundamental para concluir mi proceso. En las buenas y en las malas me dio un apoyo incondicional en mi formación. La aprecio mucho, lamento los dolores de cabeza y le agradezco la confianza. Espero llegar tan lejos como usted, para seguir construyéndome y definiéndome como profesional y como persona.

A mis amigas Jos, Yaz y Alo, les agradezco por acompañarme en las buenas y en las malas a lo largo del trayecto. Espero que las cuatro seamos unas grandes profesionistas, que nos desarrollemos con éxito y seamos capaces de cumplir con todos nuestros sueños.

De igual manera, a mis compañeros, con quienes aprendí, compartí y me divertí muchísimo. Al concluir mi proceso puede que no recuerde todas las teorías que leímos y expusimos en el salón, pero siempre voy a recordar los buenos momentos, las risas y el apoyo.

Agradezco también a todos los maestros y docentes titulares que me acompañaron en mi proceso, pero sobre todo, les agradezco a mis estudiantes. Porque entre risas, regaños y actividades, yo les enseñé, pero ellos me enseñaron a mí cómo ser docente, cómo desarrollarme y cómo manejarme en el aula.

Hoy puedo decir: ¡lo logré! Pero sé perfectamente que no fui sola. En todo el camino y en todo este proceso siempre hubo personas conmigo apoyándome, guiándome y regañándome cuando hacía falta. Por eso, hoy me comprometo a seguir adelante, siempre por mí, pero también para poner en alto a todas y cada una de esas personas que estuvieron ahí conmigo.

ÍNDICE

Introducción	8
Capítulo I. Planteamiento del Problema	11
Problema de Investigación	12
Focalización del Problema	13
Delimitación del Problema	14
Pregunta de Investigación	15
<i>Preguntas Específicas</i>	16
Objetivo General	16
<i>Objetivos Específicos</i>	16
Supuesto de Investigación	17
Justificación	17
<i>Ámbito Didáctico–Disciplinar</i>	18
<i>Ámbito Pedagógico</i>	18
<i>Ámbito Social y Educativo</i>	18
<i>Ámbito Metodológico</i>	19
<i>Ámbito de Política Educativa y Curricular</i>	19
Contexto	20
<i>Contexto Macro. Condiciones Socioculturales y su Impacto en la Matematización</i>	20
<i>Contexto Meso. Cultura Institucional y Tensiones Didácticas</i>	22
<i>Contexto Micro. El Aula como Espacio de Tensión Didáctica y Construcción de Significados</i>	24
Estado del Arte	28
<i>Fenomenología y Modelización</i>	29
<i>Estrategias de Resolución y Obstáculos Epistemológicos</i>	34
<i>La Práctica Docente y la Formación Bajo la EMR</i>	40
<i>Ubicación del Objeto de Estudio</i>	46
Capítulo II. Marco Teórico Conceptual	53
La Construcción del Número Fraccionario en Educación Primaria	54
<i>El Tránsito de los Números Naturales a los Fraccionarios</i>	55
<i>Los Significados de la Fracción en Educación Primaria</i>	57
<i>Obstáculos en el Aprendizaje de las Fracciones: del Sesgo de los Números Enteros a la Rigidez del Modelo Pictórico</i>	61
<i>La Comprensión de la Unidad de Referencia</i>	63
La Educación Matemática Realista como Fundamento Teórico	65
<i>Origen y Fundamentos de la Educación Matemática Realista</i>	66
<i>Principios de la Educación Matemática Realista</i>	68
<i>El Papel del Docente en la Educación Matemática Realista: Mediación y Andamiaje</i>	76
Matematización Horizontal y Vertical	77
<i>Conceptualización de la Matematización</i>	78
<i>Matematización Horizontal</i>	80
<i>Matematización Vertical</i>	83
<i>El Tránsito entre Niveles de Matematización</i>	85

Ubicación del Objeto de Estudio	87
Capítulo III. Referente Metodológico	90
Enfoque de la Investigación	90
Método	92
Técnicas e Instrumentos	95
<i>La Observación Participante</i>	95
<i>Videograbación y Grabaciones de Audio</i>	96
<i>Análisis de Producciones de los Alumnos</i>	96
<i>Fotografías e Imágenes</i>	97
Diseño Metodológico	97
Participantes	100
Ruta Metodológica	101
<i>Exploración diagnóstica</i>	101
<i>Planificación de la intervención</i>	101
<i>Implementación de la intervención</i>	101
<i>Reflexión y evaluación de la acción</i>	102
Capítulo IV. Del Diagnóstico Disciplinar a la Intervención Didáctica: Análisis del Tránsito de la Matemización Horizontal a la Vertical	103
Diagnóstico Disciplinar del Grupo	104
<i>Características de los Instrumentos que Conforman el Diagnóstico</i>	104
<i>Primer Instrumento: Prueba Estandarizada</i>	105
<i>Caracterización del Instrumento 2: Ejercicio Integrador de Aprendizaje (EIA)</i>	108
<i>Características del Instrumento 3: Parto y Reparto</i>	111
Resultados Obtenidos de los Instrumentos del Diagnóstico	116
<i>Primer Instrumento. La Prueba LEIREM</i>	116
<i>Resultados del Ejercicio Integrador de Aprendizaje</i>	118
<i>Tercer instrumento: Parto y Reparto</i>	121
Análisis y Resultados de la Intervención Docente Basada en la EMR	128
<i>Nivel Situacional: Uso de Estrategias Intuitivas (Sesiones 1 y 2)</i>	131
<i>Nivel Referencial: La Construcción de Modelos Para Representar Relaciones Entre Magnitudes</i>	141
<i>Nivel General: Generalización de Relaciones y Reorganización de Estrategias</i>	157
<i>Nivel Formal: Hacia la Construcción de Relaciones Matemáticas Independientes del Contexto</i>	177
Conclusiones	189
Referencias	195

Introducción

La construcción del conocimiento matemático en la educación primaria constituye uno de los desafíos más relevantes para la práctica docente contemporánea. Entre los contenidos que presentan mayores dificultades de aprendizaje se encuentran los números fraccionarios, debido a que su comprensión exige que los estudiantes trasciendan las formas de razonamiento asociadas a los números naturales para reconocer relaciones entre cantidades, medidas y particiones de una unidad. Este tránsito implica una reorganización progresiva del pensamiento matemático, en la que los alumnos deben construir nuevos significados para interpretar y resolver situaciones que involucran fracciones.

En el marco de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), el aprendizaje matemático se concibe como un proceso orientado al desarrollo del pensamiento científico, la resolución de problemas y la comprensión de fenómenos presentes en la vida cotidiana. Sin embargo, en las aulas persisten prácticas de enseñanza centradas en la reproducción de procedimientos y algoritmos, situación que dificulta que los estudiantes atribuyan significado a las operaciones con fracciones y establezcan vínculos entre los conocimientos escolares y las experiencias que viven fuera de la escuela. Esta tensión resulta especialmente evidente en la enseñanza de la suma y resta de fracciones, donde con frecuencia los alumnos aprenden reglas operativas sin comprender las relaciones matemáticas que las sustentan.

La relevancia de este objeto de estudio trasciende el ámbito curricular, ya que las fracciones forman parte de múltiples situaciones cotidianas vinculadas con el reparto, la medición, la estimación y la comparación de cantidades. Comprenderlas permite a los estudiantes interpretar y actuar sobre su entorno de manera más reflexiva. En consecuencia, favorecer aprendizajes con sentido demanda propuestas didácticas que recuperen las experiencias de los alumnos como punto de partida para la construcción progresiva del conocimiento matemático.

Desde esta perspectiva, la presente investigación se fundamenta en la Educación Matemática Realista (EMR) propuesta por Freudenthal, enfoque que concibe las matemáticas como una actividad humana susceptible de ser reconstruida por los estudiantes mediante

procesos de matematización. Particularmente, se centra en el análisis del tránsito de la matematización horizontal, caracterizada por el uso de estrategias intuitivas, lenguaje cotidiano y representaciones contextualizadas, hacia la matematización vertical, entendida como la reorganización, generalización y formalización progresiva de dichas estrategias en estructuras matemáticas más elaboradas.

Metodológicamente, el estudio se desarrolló desde un enfoque cualitativo mediante el método de Investigación-Acción, lo que permitió comprender una problemática identificada en la práctica docente e intervenir de manera sistemática para favorecer su transformación. Para ello se diseñó e implementó una secuencia didáctica de once sesiones dirigida a estudiantes de tercer grado de educación primaria, orientada a promover la construcción de significados sobre la suma y resta de fracciones a partir de contextos cercanos, modelos mediadores y procesos de reinención guiada.

Los hallazgos obtenidos permiten comprender cómo evolucionan las estrategias de resolución de los estudiantes, qué representaciones emplean durante el proceso y de qué manera logran avanzar desde procesos informales de razonamiento hacia niveles más estructurados de pensamiento matemático. Asimismo, la investigación aporta evidencias relevantes sobre el potencial de la EMR para favorecer aprendizajes significativos en torno a las fracciones y para fortalecer la reflexión docente sobre la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria.

Con la finalidad de dar cuenta del proceso investigativo desarrollado y de los elementos que sustentan la investigación, el presente documento se organiza de la siguiente manera:

Capítulo I. Planteamiento del Problema: Delimita el objeto de estudio, la pregunta de investigación y los objetivos general y específicos. En este apartado se argumenta de forma puntual la problemática observada en la práctica docente con alumnos de tercer grado, justificando la necesidad de reorientar las estrategias de enseñanza en torno a la suma y resta de fracciones.

Capítulo II. Marco Teórico Conceptual: Ofrece el sustento teórico y conceptual que orienta la comprensión del problema de investigación y fundamenta el análisis de los hallazgos. Aquí se profundiza en las bases teóricas de la EMR, se exploran sus principios (*realidad*,

actividad, interacción social, redescubrimiento guiado e interconexión), se detalla la complejidad cognitiva de la unidad de referencia y se conceptualizan las dimensiones de la matematización horizontal y vertical junto con sus niveles de comprensión.

Capítulo III. Referente Metodológico: Describe la ruta de investigación adoptada, la cual se inscribe bajo un enfoque cualitativo y el método de la Investigación-Acción. Se detallan los participantes, las fases del ciclo de intervención, así como las técnicas e instrumentos empleados para la recolección de evidencias (videgrabaciones, diarios de campo y producciones escritas de los alumnos).

Capítulo IV. Análisis de Resultados: se exponen los hallazgos derivados de la aplicación de la secuencia didáctica. Mediante la triangulación cualitativa de las producciones y discursos infantiles, se caracterizan los micro-tránsitos y niveles de matematización alcanzados por los alumnos.

Esta investigación se concluye con un apartado de reflexión sobre el alcance de los objetivos, las implicaciones para la práctica docente y las recomendaciones para futuras investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas. De este modo, el presente trabajo ofrece una aproximación comprensiva a los procesos de aprendizaje de las fracciones en la educación primaria, al tiempo que recupera la práctica docente como un espacio legítimo para la generación de conocimiento pedagógico y la transformación de la enseñanza de las matemáticas, aportando evidencias empíricas importantes, sobre cómo la reconstrucción guiada de las matemáticas puede ayudar a los estudiantes para apropiarse del conocimiento matemático con significado.

Capítulo I. Planteamiento del Problema

El presente capítulo constituye el andamiaje argumentativo y científico sobre el cual se erige la investigación. Su propósito es problematizar el proceso de construcción del número fraccionario en la educación básica, identificando la brecha existente entre la propuesta curricular normativa y la realidad cognitiva observada en el aula. Esta problematización se sustenta en la EMR de Freudenthal (1973), desde la cual el aprendizaje matemático se concibe como un proceso activo de matematización, en el que los estudiantes construyen significados a partir de situaciones con sentido y no mediante la reproducción de algoritmos descontextualizados (Freudenthal, 1983).

En este marco, el tránsito de los números naturales a los números racionales representa un punto de quiebre en la escolaridad primaria (Llinares Ciscar y Sánchez García, 1997), ya que implica pasar de un pensamiento basado en conteo discreto a uno centrado en relaciones, medidas y proporciones. La NEM, a través del campo formativo *Saberes y Pensamiento Científico*, plantea la necesidad de desarrollar este tipo de razonamiento; sin embargo, en la práctica, la enseñanza de las fracciones continúa reduciéndose a procedimientos mecánicos que dificultan la comprensión conceptual.

La investigación se sitúa metodológicamente en la Investigación-Acción, lo que permite no solo analizar el fenómeno, sino intervenir de manera sistemática en la práctica docente para transformarla (Elliott, 2005; Latorre, 2005). En este sentido, el capítulo articula el problema, su focalización y delimitación, así como las preguntas, objetivos y supuestos que orientan los ciclos de intervención.

Desde esta perspectiva, se propone superar el enfoque tradicional de la fracción como “parte-todo” para avanzar hacia una comprensión de la fracción como medida y relación, favoreciendo el tránsito de la matematización horizontal —basada en contextos y representaciones informales— hacia la matematización vertical, caracterizada por la formalización progresiva del pensamiento matemático.

Problema de Investigación

El problema central de esta investigación radica en la desconexión entre las formas intuitivas de pensamiento de los estudiantes y la enseñanza formal de las fracciones en la educación primaria. Al transitar del dominio de los números naturales al campo de los números fraccionarios, los estudiantes de tercer grado enfrentan una ruptura conceptual que no se resuelve mediante la simple incorporación de nuevos contenidos, sino que exige una reestructuración profunda de sus esquemas de pensamiento.

La evidencia diagnóstica ¹muestra que los estudiantes tienden a interpretar la fracción como la combinación de dos números naturales independientes (numerador y denominador), lo que da lugar a errores sistemáticos, particularmente en la suma y resta, como la suma directa de denominadores. Este fenómeno evidencia la persistencia del sesgo del número entero y la ausencia de comprensión de la fracción como una magnitud única referida a una unidad.

Desde la perspectiva de la EMR, esta problemática se agrava por lo que Freudenthal denomina "inversión antididáctica": la imposición del algoritmo formal antes de haber agotado la fenomenología del problema. Los estudiantes muestran una dependencia hacia el modelo "parte-todo" y representaciones pictóricas estáticas (el "modelo de pizza" o repartos circulares). El conflicto surge cuando estas herramientas visuales, que deberían ser un apoyo transitorio, se convierten en un obstáculo. En situaciones que demandan el uso de la fracción como medida o cociente, el dibujo deja de ser funcional. Esta limitación impide que el estudiante realice el tránsito de un "modelo de" una situación de reparto a un "modelo para" el razonamiento matemático abstracto (Gravemeijer, 1999).

Un nudo crítico de este problema es la ilusión de competencia en la suma. Al haber sido expuestos previamente a algoritmos mecanizados, los estudiantes pueden llegar al resultado correcto sin comprender la lógica subyacente. La brecha se documenta cuando, al solicitar una justificación basada en el contexto o al enfrentarse a la resta, el estudiante colapsa. Al ser la resta un terreno no explorado, se convierte en el escenario donde se manifiesta la carencia de una Fenomenología Didáctica: el alumno no sabe cómo movilizar lo que "sabe" de la suma para

¹ Presentada en el *Capítulo VI. Del Conocimiento Disciplinar a la Intervención Didáctica: Análisis del Transito de la Matematización Horizontal a la Vertical.*

construir la resta, evidenciando que el aprendizaje previo fue una recepción de reglas y no un proceso de redescubrimiento guiado.

Finalmente, el problema se focaliza en la resistencia del estudiante a abandonar la matematización horizontal. El alumnado permanece anclado en descripciones narrativas o dibujos que no logran evolucionar hacia modelos mediadores lineales, como la recta numérica. Esta resistencia se hace evidente ante la presencia de fracciones impropias y mixtas. Cuando la cantidad excede la unidad, el dibujo tradicional pierde su eficacia, obligando al pensamiento a buscar una estructura simbólica más robusta.

En consecuencia, el problema de investigación reside en caracterizar cómo la falta de "andamios" didácticos adecuados impide que el estudiante utilice sus propias producciones informales como base para construir la verticalización del conocimiento, dejando la suma y resta de fracciones en el plano de la ejecución ciega en lugar del pensamiento relacional con sentido numérico.

Focalización del Problema

La focalización de la investigación se sitúa en el análisis del tránsito de la matematización horizontal a la vertical durante la resolución de problemas de suma y resta de fracciones en estudiantes de tercer grado de educación primaria, entendiendo este tránsito como un proceso gradual de transformación de representaciones informales en herramientas matemáticas estructuradas. En este sentido, se identifican tres núcleos problemáticos que representan el límite donde el dibujo ya no es suficiente y el número debe emerger como objeto matemático con entidad propia, lo que posibilita observar dicho tránsito.

En primer lugar, se focaliza la insuficiencia del modelo "parte-todo" ante el desafío de las fracciones impropias. Los estudiantes logran resolver problemas de partición en contextos estáticos y con cantidades menores a la unidad, pero experimentan un problema cognitivo cuando la situación demanda operar con magnitudes que exceden el entero. Este escenario se identifica como el motor de cambio necesario para obligar al alumnado a abandonar las representaciones pictóricas (horizontales) y desarrollar estrategias de cálculo simbólico y mental (verticales). La focalización, por tanto, no reside en el éxito del dibujo, sino en el análisis de

cómo el conflicto con la unidad obliga al estudiante a trascender la representación gráfica estática hacia una comprensión de la fracción como un objeto numérico dinámico. Este punto constituye un momento clave para observar la transición hacia formas más avanzadas de pensamiento.

En segundo lugar, se identifica un estancamiento en la fase de modelización. El problema central no es la falta de contextos realistas, sino la dificultad para que el estudiante transforme sus producciones informales en "modelos para" el pensamiento matemático. Se observa que los alumnos permanecen anclados en descripciones narrativas sin lograr que las representaciones del contexto (como el reparto de productos en el mercado local) funcionen como herramientas de pensamiento. La focalización reside en documentar los "micro-tránsitos" donde el lenguaje coloquial comienza a formalizarse. Se busca determinar en qué momento el estudiante deja de usar el contexto como un apoyo externo y empieza a usar las representaciones del mismo (como la recta numérica) como una herramienta para la síntesis didáctica.

Finalmente, el foco se pone en la fenomenología didáctica de la resta como palanca de redescubrimiento. Al ser la resta una operación no explorada formalmente por el grupo de tercer grado en el cual se desarrolla la investigación², representa la oportunidad de observar la verticalización en su estado puro: ¿cómo usan lo que saben de la suma para construir la resta? Se focaliza la brecha entre el uso del algoritmo memorizado y la capacidad de justificar resultados con sentido numérico. Si la actividad no favorece este tránsito, el foco de la investigación se desplaza hacia el análisis a posteriori para explicar qué "andamio" faltó en el diseño. En esencia, la focalización permite acotar la intervención al diseño de secuencias didácticas que fuercen la evolución de los procedimientos informales hacia la comprensión de la operación a partir de la equivalencia de fracciones, garantizando que la formalización sea una consecuencia del pensamiento del alumno y no una imposición docente.

Delimitación del Problema

La presente investigación se delimita al estudio del tránsito de la matematización horizontal a la vertical en la resolución de problemas de suma y resta de fracciones en estudiantes de tercer grado de educación primaria. En el plano conceptual, el estudio se centra en los significados de

² Como se precisa en el más adelante en el apartado *de Contexto Micro. El Aula como Espacio de Tensión Didáctica y Construcción de Significados*.

la fracción como medida y cociente, priorizando el reparto equitativo y la iteración de la unidad fraccionaria. Asimismo, se prioriza el análisis del paso de representaciones pictóricas a modelos mediadores, como la recta numérica. En este sentido, se ha seleccionado la operación de resta como la palanca principal para el redescubrimiento guiado, dado que, al no haber sido explorada previamente por el grupo, ofrece un escenario fértil para observar la construcción de las equivalencias de fracciones a partir de razonamientos propios y producciones originales.

La complejidad numérica se delimita intencionalmente al uso de fracciones impropias y mixtas. Se asume que el enfrentamiento con cantidades que exceden la unidad actúa como el motor de cambio que obliga a los estudiantes a trascender las representaciones horizontales en favor de la verticalización y la formalización simbólica. En el plano cognitivo, se analizan las estrategias de resolución, los tipos de representaciones utilizadas y los procesos de argumentación de los estudiantes.

Metodológicamente, la intervención se delimita en tres fases analíticas: una fase inicial centrada en el predominio de lo horizontal con sumas menores a la unidad; una fase intermedia de conflicto cognitivo detonada por la aparición de fracciones impropias; y una fase final de consolidación donde se evalúa el uso de modelos mediadores en problemas complejos. Poblacionalmente, el estudio se focaliza en un grupo de 26 estudiantes de tercer grado de una Escuela Primaria, ubicada en Soledad de Graciano Sánchez, S.L.P. Finalmente, la delimitación temporal comprende el ciclo escolar 2025-2026, situando la fase de intervención y recolección de evidencias en los meses de septiembre de 2025, marzo y abril de 2026, garantizando así un análisis a posteriori que identifique los micro-tránsitos lingüísticos y simbólicos logrados por los alumnos.

Pregunta de Investigación

¿Cómo se favorece el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en la resolución de problemas de suma y resta de fracciones en estudiantes de tercer grado de educación primaria mediante una intervención didáctica basada en la Educación Matemática Realista?

Preguntas Específicas

- ¿Qué saberes previos y concepciones iniciales presentan los estudiantes de tercer grado respecto al concepto de fracción y la unidad de referencia en las fracciones?
- ¿Qué estrategias de resolución y qué tipos de representaciones utilizan los estudiantes durante la implementación de la intervención didáctica para resolver problemas de suma y resta de fracciones?
- ¿Cómo evoluciona el uso de modelos desde representaciones informales hacia herramientas matemáticas más estructuradas?
- ¿Cómo se manifiesta el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en los procesos de resolución de problemas de fracciones desarrollados por los estudiantes a lo largo de la intervención?

Objetivo General

Analizar el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en estudiantes de tercer grado de educación primaria durante la resolución de problemas de suma y resta de fracciones, mediante una intervención didáctica basada en la Educación Matemática Realista.

Objetivos Específicos

- Identificar los saberes previos y las concepciones iniciales de los estudiantes sobre el concepto de fracción y la unidad de referencia de fracciones.
- Diseñar e implementar una intervención didáctica fundamentada en los principios de la Educación Matemática Realista que promueva la resolución de problemas de suma y resta de fracciones en estudiantes de tercer grado de educación primaria.
- Analizar las estrategias de resolución de problemas y las representaciones matemáticas que emplean los estudiantes durante la implementación de la intervención didáctica.
- Valorar el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en los procesos de resolución de problemas de suma y resta de fracciones desarrollados por los estudiantes.

Supuesto de Investigación

Se conjetura que el tránsito de la matematización horizontal a la vertical ocurre en la medida en que los contextos realistas (reparto equitativo e iteración) actúan como andamiajes cognitivos que transforman la percepción de la fracción de una "representación visual estática" a un "objeto numérico dinámico". En este sentido, la utilización del modelo de la recta numérica o la regla de medir facilitará que el estudiante desvincule la fracción de la unidad de referencia única, permitiéndole operar con la suma y resta de fracciones como una extensión de las propiedades de la medida, logrando así la formalización de estrategias de resolución con sentido numérico. En este sentido se plantea el siguiente supuesto:

Una intervención didáctica basada en la Educación Matemática Realista, que incorpore contextos significativos y el uso progresivo de modelos mediadores, favorecerá que los estudiantes transiten de representaciones informales hacia la construcción de un pensamiento matemático más estructurado, comprendiendo la fracción como una magnitud y no como la simple combinación de dos números naturales.

Justificación

La presente investigación se justifica desde una perspectiva integral que articula diversos ámbitos de análisis: el *didáctico-disciplinar*, el *pedagógico*, el *social y educativo*, el *metodológico*, así como el de la *política educativa y curricular*. Esta mirada multidimensional permite comprender la relevancia del estudio no solo en términos teóricos, sino también en su impacto en la práctica docente, en la mejora del aprendizaje de los estudiantes y en la atención a problemáticas estructurales del sistema educativo.

Desde esta perspectiva, el estudio sobre la suma y resta de fracciones se posiciona como una oportunidad para repensar la enseñanza de los números fraccionarios, transitando de enfoques mecanicistas centrados en la repetición de algoritmos hacia perspectivas que favorezcan la comprensión, el sentido numérico y la construcción activa del conocimiento matemático. Este tránsito resulta fundamental en el marco de la NEM, la cual promueve un aprendizaje significativo, situado y orientado al desarrollo del pensamiento crítico.

Ámbito Didáctico–Disciplinar

A pesar del amplio desarrollo teórico en la Educación Matemática, particularmente en torno al aprendizaje de las fracciones, persiste una brecha significativa entre los aportes de la investigación y su implementación en el aula. En este sentido, la investigación adquiere relevancia al recuperar los postulados de Freudenthal (1973 y 1983) y su propuesta de EMR, específicamente la fenomenología didáctica, como un marco para diseñar experiencias de aprendizaje que partan de situaciones con sentido para el estudiante.

El aporte central radica en caracterizar cómo el tránsito de la fracción concebida como “parte-todo” hacia su comprensión como medida permite superar obstáculos epistemológicos asociados al pensamiento del número entero. De esta manera, la investigación no solo retoma un problema ampliamente documentado, sino que propone una vía concreta para su atención mediante el análisis del proceso de matematización horizontal y vertical.

Ámbito Pedagógico

Desde el punto de vista pedagógico, la investigación contribuye a replantear el papel del docente como mediador del aprendizaje, alejándose de prácticas transmisivas para asumir un rol orientador que favorezca la construcción progresiva del conocimiento. A través del diseño de situaciones realistas se ofrece una estructura didáctica que permite anticipar, acompañar y analizar los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, el estudio permite comprender cómo las representaciones, los contextos y los modelos mediadores (como la recta numérica) inciden en la evolución del pensamiento matemático, aportando elementos concretos para la toma de decisiones en el aula.

Ámbito Social y Educativo

La pertinencia social de la investigación se sustenta en los resultados de evaluaciones nacionales e internacionales como PISA en el 2022 (OCDE, 2023) y PLANEA en el 2018 (INEE, 2019), los cuales evidencian un rezago significativo en el desarrollo de competencias matemáticas en México, particularmente en el manejo de números decimales y fraccionarios. Justificar este estudio implica atender este rezago desde la base (tercer grado de primaria), proporcionando una propuesta que garantice el derecho a una educación de excelencia y equidad, permitiendo que el

alumnado adquiera herramientas de razonamiento lógico para su vida cotidiana y trayectoria académica posterior.

Ámbito Metodológico

Desde la perspectiva metodológica, la investigación se inscribe en el enfoque de Investigación-Acción, lo que le otorga un carácter transformador y reflexivo. Este enfoque no solo permite analizar la problemática, sino intervenir directamente en ella, generando conocimiento situado a partir de la práctica docente. En este sentido, el estudio aporta un modelo sistematizado de intervención que puede ser retomado por otros docentes, tanto en formación inicial como en servicio, fortaleciendo la figura del profesor como investigador de su propia práctica.

Ámbito de Política Educativa y Curricular

La investigación cobra especial relevancia en el contexto de la NEM, la cual plantea la necesidad de articular el aprendizaje escolar con la realidad social de los estudiantes. Sin embargo, a nivel operativo, los programas de estudio carecen de orientaciones didácticas específicas para la enseñanza de las fracciones.

Ante esta situación, el presente estudio ofrece una propuesta fundamentada en la EMR como un medio para concretar los principios del campo formativo *Saberes y Pensamiento Científico*, demostrando que es posible vincular contextos significativos con la construcción del conocimiento matemático formal.

En conjunto, la investigación se justifica porque:

- Atiende un problema estructural del aprendizaje matemático en educación primaria.
- Articula teoría didáctica con práctica docente.
- Propone una intervención concreta basada en evidencia.
- Contribuye al desarrollo profesional docente.
- Responde a demandas curriculares y sociales actuales.

De este modo, no solo se busca mejorar la comprensión de la suma y resta de fracciones, sino aportar al campo educativo una propuesta que favorezca el desarrollo del pensamiento matemático con sentido, equidad y pertinencia social.

Contexto

El contexto de la presente investigación no se concibe únicamente como un escenario descriptivo, o como la delimitación geográfica o institucional, se asume como un sistema de relaciones que produce, condiciona y transforma los significados matemáticos que construyen los estudiantes. Analizar el contexto implica identificar los factores de influencia que permean la práctica docente y el desempeño del alumnado; desde una perspectiva sociocultural, el aprendizaje se entiende como un proceso situado, mediado por la interacción social, el lenguaje y las prácticas culturales (Vygotsky, 1978). En este sentido, el contexto no es externo al aprendizaje, sino constitutivo del mismo.

Bajo esta premisa, el análisis contextual se organiza en tres niveles que permiten situar la investigación: el contexto macro, donde se ubica la institución dentro de su realidad geográfica y social; el contexto meso, en el cual se analizan la cultura institucional, la organización escolar y las dinámicas colectivas que condicionan la práctica educativa; y el contexto micro, donde se focaliza el aula como el espacio inmediato de interacción y construcción del aprendizaje.

Contexto Macro. Condiciones Socioculturales y su Impacto en la Matematización

La presente investigación se desarrolla en el municipio de Soledad de Graciano Sánchez, San Luis Potosí. Esta localidad, al formar parte de la zona metropolitana de la capital del estado mencionado, se caracteriza por una dinámica de urbanización acelerada y una alta movilidad diaria. La escuela se sitúa en la cabecera municipal, un punto estratégico que facilita la conectividad con diversas rutas de transporte y centros de actividad económica.

De acuerdo con los datos más recientes del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI, 2020), el municipio cuenta con una población de 332,072 habitantes. Este volumen demográfico refleja una comunidad en expansión, donde la densidad poblacional es un factor determinante para la organización de los servicios públicos, incluida la educación.

En cuanto a la dinámica económica, existe una gran variedad de empleos en el sector industrial de la región como de una importante actividad en el comercio local, la construcción y los servicios informales. Esta situación impacta de manera indirecta en la dinámica escolar, ya que las largas jornadas laborales de los padres de familia a menudo limitan el tiempo disponible para involucrarse de forma continua en las tareas académicas de sus hijos.

En este sentido, las familias de los estudiantes presentan diversas configuraciones. Se identifican tanto familias nucleares, conformadas por ambos padres, como familias monoparentales, siendo estas últimas una presencia significativa dentro de la comunidad escolar. Asimismo, en algunos casos, los estudiantes se encuentran al cuidado de abuelos, tíos u otros familiares, lo que influye en las dinámicas de acompañamiento académico y en los procesos de aprendizaje³.

El entorno en el cual se encuentra la escuela cuenta con servicios básicos como electricidad, alumbrado público y acceso a redes de telecomunicación. Sin embargo, la infraestructura urbana presenta algunas deficiencias como el suministro de agua potable y el mantenimiento de drenajes. Pese a estas limitaciones, la ubicación de la institución tiene acceso a transporte público, comercio local y servicios de salud, elementos que favorecen la integración de la comunidad al dinamismo de la capital.

La zona se enfrenta a problemáticas sociales complejas, tales como focos de inseguridad, precariedad económica y la vulnerabilidad ante el consumo de sustancias. Estos factores, junto con la necesidad de fortalecer los enfoques de equidad e inclusión, inciden en la vida escolar, obligando a que la institución educativa asuma un rol que va más allá de la enseñanza de contenidos.

En este escenario, se puede inferir que, las condiciones socioeconómicas del municipio generan dinámicas familiares caracterizadas por: a) limitada mediación académica en el hogar y b) escasa interacción con situaciones matemáticas formales; lo que tiene implicaciones directas en la matematización horizontal, ya que los estudiantes poseen experiencias cotidianas ricas (compras, reparto, medida), pero carecen de herramientas para formalizarlas matemáticamente. Desde la perspectiva de Freudenthal (1973, 1983), la realidad debe ser el punto de partida del

³ Información proporcionada por la directora de la institución.

aprendizaje matemático; sin embargo, cuando esta no es didácticamente resignificada, permanece en un nivel intuitivo, sin evolucionar hacia estructuras formales.

La comprensión de este entorno es fundamental para el presente estudio puesto que la escuela no opera como un sistema aislado, sino como un espacio. El objetivo de este análisis es reconocer que los procesos de enseñanza no son ajenos a la realidad del estudiante. Por el contrario, los retos sociales, la diversidad económica y las características culturales del entorno deben ser la materia prima para diseñar situaciones didácticas que conecten con la vida de los alumnos.

Para los fines de esta investigación, entender este contexto comunitario y social que rodea a la institución como la fuente principal de las experiencias de los niños es fundamental, ya que permite implementar la EMR, con la intención de que, las situaciones que los alumnos viven en su día a día se conviertan en el material de trabajo para construir el conocimiento matemático. Así, la realidad deja de ser un factor externo y se transforma en el eje central que da sentido a lo que ocurre dentro del aula.

Contexto Meso. Cultura Institucional y Tensiones Didácticas

La escuela primaria se constituye como el espacio físico y simbólico donde se materializa la intervención pedagógica. La institución atiende a una matrícula de aproximadamente 500 estudiantes, distribuidos en 19 grupos que abarcan desde el primero hasta el sexto grado. La planta docente está integrada por 19 profesores frente a grupo, dos docentes de Educación Física, un profesor de Inglés, una dirección, una subdirección, además de personal administrativo y de intendencia. El plantel opera bajo una modalidad de organización completa de turno matutino que comparte infraestructura con un turno vespertino.

La escuela posee instalaciones amplias que se adaptan a su gran matrícula. El plantel cuenta con 19 salones, dos canchas (una techada y otra abierta), biblioteca, bodega de Educación Física, cooperativa escolar y tres espacios habilitados como comedores. También dispone de un aula de medios, que es un espacio estratégico ya que, además de su uso interno, sirve como un espacio para cursos y reuniones de la inspección de zona escolar. Además, la institución cuenta con un espacio anexo destinado a la inspección de la zona escolar.

Es importante señalar que, aunque el espacio es suficiente, el uso intensivo diario genera un desgaste constante en la infraestructura. Aunque se han recibido apoyos federales para la mejora de la fachada, los pisos y parte del mobiliario, aún persisten retos de mantenimiento, particularmente en el aula de medios, donde la falta de equipo tecnológico funcional limita el aprovechamiento de recursos digitales en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Aunado a ello, la mayoría de las aulas no cuentan con equipamiento tecnológico, por lo que el uso de recursos digitales depende, en gran medida, de los materiales que cada docente pueda gestionar de manera individual.

La filosofía institucional se orienta hacia una educación integral, humanista y de excelencia. Su propósito fundamental es formar estudiantes capaces de desenvolverse con autonomía en su entorno, promoviendo valores como la responsabilidad, la equidad y la inclusión. Este enfoque se refleja en las prácticas escolares y en la organización del trabajo docente.

El ambiente laboral se caracteriza por ser organizado y favorable para el desarrollo de las actividades escolares. Aunque el tamaño del personal dificulta la convivencia entre todos los miembros, se observa una colaboración estrecha entre los docentes de un mismo grado. El trabajo colegiado se lleva a cabo mediante la dosificación común de contenidos, acordada en los Consejos Técnicos Escolares (CTE), esta misma, realizada por los docentes del mismo grado, lo que permite mantener coherencia en la planeación y seguimiento de los aprendizajes. No obstante, esta organización también representa el reto de conservar la flexibilidad necesaria para atender las particularidades de los estudiantes.

En la institución se desarrollan diversas comisiones escolares, entre las que destacan las de ecología, cooperativa y biblioteca. Esta última cobra especial relevancia a través de actividades como los maratones de lectura, los cuales surgen como respuesta a la identificación de áreas de oportunidad en la comprensión lectora. Asimismo, estas acciones se articulan con los objetivos planteados en el Programa de Mejora Continua (PMC) de la institución, orientados a fortalecer la participación de los padres de familia y el desarrollo de aprendizajes fundamentales, particularmente en el área de matemáticas y español.

La relación con los padres de familia constituye un pilar fundamental en el funcionamiento de la escuela. La Asociación de Padres de Familia (APF) no solo colabora en la

gestión de recursos, sino que también participa activamente en el mantenimiento y la seguridad del plantel, evidenciando un compromiso compartido con la educación de los estudiantes.

En cuanto a la atención a la diversidad, la institución no cuenta con el apoyo permanente de la Unidad de Servicios de Apoyo a la Educación Regular (USAER); sin embargo, mantiene vinculación con diversas instancias externas, como el Sistema para el Desarrollo Integral de la Familia (DIF), el Centro de Atención Múltiple (CAM) y el Centro de Atención y Multidiscapacidad Psicomotriz (CAMP), lo que permite canalizar y atender necesidades específicas de los alumnos.

La institución promueve un enfoque humanista e inclusivo; no obstante, en la práctica se identifican tensiones como: a) estandarización mediante dosificación común, b) presión por cubrir contenidos y c) limitaciones tecnológicas; estas condiciones favorecen prácticas docentes centradas en el algoritmo, la repetición y la homogeneización del aprendizaje; situación que entra en contradicción con los principios de la EMR. En este sentido, se identifica una tensión didáctica entre la intención de promover aprendizajes significativos y la tendencia a privilegiar procedimientos estandarizados, lo que incide directamente en la forma en que se enseñan y aprenden las fracciones.

Contexto Micro. El Aula como Espacio de Tensión Didáctica y Construcción de Significados

El escenario de la presente investigación se sitúa en un grupo de tercer grado de educación primaria, conformado por 25 estudiantes, de los cuales 14 son alumnas y 11 alumnos, cuyas edades oscilan entre los ocho y diez años.

En términos académicos, el grupo presenta una marcada heterogeneidad en niveles de desempeño. Se identifican estudiantes que aún enfrentan dificultades en los procesos de lectoescritura, lo que repercute directamente en la comprensión de consignas y en la realización de las actividades individuales.

Al mismo tiempo, existe un sector reducido del grupo que destaca por su participación activa y rapidez en la realización de las actividades, lo que permite implementar estrategias como el uso de alumnos monitores para favorecer el aprendizaje entre pares. Esta característica

evidencia no solo diferencias en el ritmo de aprendizaje, sino también la posibilidad de aprovechar dichas diferencias como recurso pedagógico.

En cuanto al clima áulico, el grupo se caracteriza por ser dinámico y participativo; sin embargo, también presenta facilidad para distraerse ante estímulos internos y externos. Se identifican conflictos interpersonales que evidencian áreas de oportunidad en la regulación emocional y la convivencia. Asimismo, se observan estudiantes que manifiestan conductas disruptivas o dificultades para el trabajo colaborativo, lo que incide directamente en la organización de las actividades y en la dinámica del aula.

La dinámica de aprendizaje refleja una polarización en los ritmos de trabajo. Mientras que algunos estudiantes trabajan con mayor rapidez y autonomía, otros de ellos requieren acompañamiento constante. En este sentido, se observa que gran parte del grupo tiende a depender de la guía directa de la docente para iniciar, desarrollar o concluir las actividades, así como para comprender las explicaciones, lo que limita la autonomía en el aprendizaje. No obstante, es un grupo que muestra interés y disposición hacia las actividades dinámicas y lúdicas, particularmente aquellas que implican juego y participación activa; sin embargo, también responden de manera favorable al trabajo mediante hojas de actividades, donde logran concentrarse y desarrollar las consignas planteadas. Esta situación demanda de la docente una intervención flexible basada en la adaptación de las actividades, la diversificación de recursos didácticos y la atención individualizada, con el fin de atender la diversidad presente en el aula.

Otro elemento relevante es la dinámica del aula, donde intervienen factores físicos, emocionales y sociales que influyen en el proceso educativo. En este grupo, la jornada escolar suele verse interrumpida por situaciones como la organización escolar, la ubicación y la dinámica dentro del aula, lo que fragmenta el ritmo de trabajo y exige una constante reorganización de las actividades. Esto posiciona al docente en un rol que trasciende la enseñanza de contenidos, incorporando la mediación de conflictos, la adaptación de contenidos y la gestión del tiempo como elementos centrales de la práctica.

Las condiciones descritas en el contexto áulico permiten comprender con mayor claridad las tensiones que atraviesan el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, específicamente siendo de interés en esta investigación el proceso de aprendizaje y enseñanza de las suma y resta de fracciones, al tratarse de un grupo de tercer grado (nivel en el que inicia de

manera formal el abordaje de las fracciones), las dificultades en lectoescritura, la heterogeneidad en los ritmos de aprendizaje y la necesidad constante de mediación docente se convierten en factores determinantes que inciden directamente en la construcción de este concepto.

El proceso de construcción del número fraccionario en la educación primaria no constituye una progresión lineal, sino un fenómeno complejo donde convergen diversas tensiones que limitan el aprendizaje significativo. Una de las principales problemáticas radica en la disonancia entre la propuesta pedagógica de la NEM y la persistencia de prácticas de enseñanza centradas en la mecanización. Aunque en las especificidades del Programa Sintético Fase 4 (Secretaría de Educación Pública, [SEP], 2024) se plantea el desarrollo del pensamiento científico, en la práctica cotidiana de los docentes se observa una tendencia a privilegiar el algoritmo sobre la comprensión conceptual, reduciendo el aprendizaje de las fracciones a la ejecución de procedimientos sin sentido.

Esta disonancia entre lo curricular y la práctica desplaza el aprendizaje de las fracciones hacia un terreno de ejecución, donde el estudiante aprende a "operar" con números sin entender su naturaleza, desaprovechando las oportunidades de razonamiento relacional que ofrece el campo formativo de Saberes y Pensamiento Científico⁴.

A esta situación se suma el obstáculo epistemológico que representa el tránsito de los números naturales a las fracciones. Los estudiantes, habituados a las propiedades de los números naturales, intentan trasladarlas de manera directa a las fracciones, interpretándolas como la combinación de dos números independientes. Esta interpretación errónea evidencia que la enseñanza suele abordar las fracciones como una extensión del conteo, cuando en realidad implica una reestructuración profunda del pensamiento hacia la medida y la proporción.

Desde la perspectiva de la EMR, dentro del salón se identifica una “inversión antididáctica” en el modelo de enseñanza de la docente titular y en los cuadernos de los estudiantes, en la que se introduce el algoritmo formal sin haber explorado previamente la

⁴ El Campo Formativo de Saberes y Pensamiento Científico se define como el espacio curricular enfocado en la comprensión de los fenómenos naturales y su relación con lo social, concibiendo los saberes como construcciones culturales. Según la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2022), este campo desarrolla un razonamiento estructurado mediante habilidades para indagar, interpretar, modelizar y explicar el entorno a través de un aprendizaje gradual y vivencial. Dentro de este enfoque se integra formalmente el área de las matemáticas, incorporándose no como una asignatura aislada, sino como una herramienta humana e interdependiente indispensable para modelar, resolver problemas concretos y estructurar dicho pensamiento científico (SEP, 2022).

fenomenología de la fracción. Esta problemática se ve reforzada por el uso predominante de representaciones estáticas, como el modelo parte-todo, que, aunque útiles en etapas iniciales, resultan insuficientes cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones más complejas.

Asimismo, se reconoce como problemática central el estancamiento en la matematización horizontal. Los estudiantes logran describir situaciones y representarlas mediante esquemas informales; sin embargo, carecen de los andamios necesarios para transformar estas representaciones en herramientas matemáticas formales. Ante esta dificultad, el docente suele recurrir directamente a la guía y a la regla aritmética, lo que interrumpe el proceso de reinención guiada y limita la construcción del conocimiento.

En este contexto, la tendencia hacia la mecanización se intensifica, particularmente en grupos con alta diversidad, donde las estrategias de enseñanza tienden a simplificarse para mantener el control del grupo, dejando en segundo plano la comprensión. Esto evidencia la necesidad de replantear la práctica docente desde enfoques que respondan a la realidad del estudiante.

Desde la EMR, el grupo presenta condiciones favorables para el desarrollo de procesos de matematización horizontal, debido a su carácter participativo y a su disposición para representar ideas. No obstante, el desafío radica en favorecer el tránsito hacia la matematización vertical mediante la implementación de secuencias didácticas que promuevan la reinención guiada del conocimiento. En este enfoque, el rol tradicional del docente como transmisor se transforma, dando lugar a una mediación que impulsa al estudiante a construir, explorar y reflexionar sobre sus propias producciones, promoviendo así una mayor autonomía.

En este sentido, la contextualización, a partir de situaciones reales o imaginables, se posiciona como un elemento clave. El uso de actividades basadas en el juego, la manipulación y el trabajo colaborativo responde a las características del grupo y favorece la construcción de significados compartidos en torno a las fracciones. Estrategias como el aprendizaje entre pares y el uso de alumnos monitores adquieren especial relevancia, ya que permiten que los estudiantes avancen a partir de sus propias producciones y comprensiones.

Asimismo, la diversidad presente en el aula, lejos de constituir un obstáculo, representa una oportunidad para el desarrollo de estrategias inclusivas que favorezcan la construcción

progresiva del concepto de fracción, partiendo de experiencias concretas hacia representaciones más abstractas, reconociendo que el aprendizaje de las fracciones implica un proceso de reconstrucción conceptual que requiere tiempo, mediación y experiencias significativas.

Es así que aula se configura como un espacio de investigación-acción, donde la complejidad no debe entenderse como una barrera, sino como el punto de partida para la transformación pedagógica. Este escenario, el diseño y la implementación de una intervención basada en la EMR buscan favorecer el tránsito de la matematización horizontal a la vertical a partir de la experiencia del estudiante, de esta manera, la intervención didáctica se orienta no solo al dominio de procedimientos, sino a la construcción de un pensamiento matemático comprensivo, significativo e inclusivo.

Estado del Arte

Para la construcción del presente estado del arte se realizó una revisión documental integrada por once investigaciones publicadas entre 2013 y 2026, conformadas por nueve artículos científicos y dos capítulos de libro especializados en matemática educativa, particularmente en el estudio de las fracciones, la EMR, la matematización y la resolución de problemas en educación primaria. La búsqueda de información se llevó a cabo mediante motores académicos y bases de datos especializadas como Google Académico, Dialnet, Redalyc y SciELO, así como en memorias de congresos especializados en matemática educativa y repositorios institucionales de universidades iberoamericanas. Los documentos fueron localizados principalmente en revistas científicas, libros colectivos de investigación educativa, memorias académicas y repositorios universitarios de México, España, Colombia y Perú.

Con la finalidad de otorgar coherencia analítica y claridad metodológica a la revisión, los trabajos se organizaron en tres dimensiones de análisis. La primera dimensión, denominada *Fenomenología y Modelización*, integra cinco investigaciones centradas en los procesos de representación de las fracciones, el tránsito de modelos pictóricos hacia modelos lineales y el uso de la recta numérica como soporte de matematización. La segunda dimensión, *Estrategias de resolución y obstáculos cognitivos al operar con fracciones*, agrupa tres estudios orientados al análisis del pensamiento infantil, las estrategias operativas y las dificultades cognitivas vinculadas con el sesgo del número natural y la resolución de problemas fraccionarios.

Finalmente, la tercera dimensión, *La práctica docente bajo la mirada de la Educación Matemática Realista*, integra tres investigaciones enfocadas en la mediación docente, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y las prácticas pedagógicas asociadas con la enseñanza de las fracciones desde el enfoque realista. Esta organización permitió identificar tanto los aportes teóricos y metodológicos más relevantes como los vacíos didácticos y operativos que justifican la pertinencia de la presente investigación

Fenomenología y Modelización

El análisis de la literatura científica contemporánea permite identificar un giro paradigmático en la enseñanza de las fracciones, el cual transita desde representaciones pictóricas estáticas hacia modelos lineales y dinámicos que favorecen la construcción de objetos mentales robustos. En este marco, la investigación de Butto Zarzar (2013) resulta fundamental para comprender las dificultades que enfrentan los estudiantes de sexto grado de primaria en escuelas públicas de la Ciudad de México, México. Al plantear metodológicamente la pregunta sobre cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones y cómo evolucionan sus nociones matemáticas al implementar una secuencia didáctica en dos ambientes diferenciados, la autora desarrolló un estudio de intervención pedagógica bajo un enfoque cualitativo.

Los autores de este estudio sustentaron su análisis en “el Modelo de los subconstructos de Kieren (1993), la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990) y la Transposición Didáctica de Chevallard (1985)” (Butto Zarzar, 2013, p. 36-37).

La muestra estuvo constituida por un grupo de 26 alumnos de entre 10 y 12 años, con quienes se emplearon un cuestionario inicial y final de fracciones, junto con entrevistas clínicas individuales de corte piagetiano. La intervención consistió en una secuencia didáctica bimodal estructurada en seis niveles progresivos que contrastó un ambiente analógico de lápiz y papel basado en el trabajo de Coxford (1975)⁵ con un ambiente de recursos interactivos digitales de la plataforma Enciclomedia del ILCE, incluyendo el software de balanza y reactivos multimedia.

⁵ El trabajo de Coxford y otros (1975), recuperado por Butto Zarzar (2013) para el diseño de actividades escritas, consiste en una secuencia didáctica de seis etapas para la construcción del concepto de fracción: 1) identificación de la unidad, 2) partición con materiales concretos en partes iguales, 3) asignación de nombres orales, 4) traslación semiótica entre registros (oral, escrito y concreto), 5) representación icónica mediante dibujos y diagramas, y 6) ampliación de la noción racional a través de fracciones mayores que la unidad, modelos discretos y equivalencias.

Los resultados del diagnóstico inicial revelaron que solo 10 alumnos mostraban un nivel alto, mientras que 16 se distribuyeron entre los niveles medio e inicial, evidenciando que las mayores dificultades radicaban en la ubicación en la recta numérica y la representación de fracciones impropias, debido a que trataban el numerador y el denominador de manera aislada bajo la acción mecánica de dividir y pintar. Como conclusión general, la autora validó que el uso exclusivo del modelo restrictivo parte-todo actúa como un obstáculo didáctico y cognitivo, demostrando que los estudiantes se encuentran en una compleja transición cognitiva desde los números enteros hacia los racionales, por lo que es indispensable diversificar de manera sistemática los soportes de representación alternando entre medios físicos y entornos virtuales interactivos.

Esta necesidad de interactividad y dinamismo digital es profundizada por Valenzuela García, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto (2016), quienes desarrollaron una investigación cualitativa y fenomenológica enmarcada en experimentos de diseño. El estudio se planteó el cuestionamiento ¿cómo debe estructurarse e implementarse un Modelo Teórico Local (MTL) inicial y una secuencia de enseñanza basada en applets de GeoGebra para favorecer la conceptualización de las fracciones como relación parte-todo y medida en alumnos de educación primaria? El referente teórico de esta investigación combinó “la metodología de los Modelos Teóricos Locales de Filloy (1999), los subconstructos de medida y parte-todo de Kieren (1976) y la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1983)” (Valenzuela García, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto, 2016, p. 4),

Los participantes fueron un grupo de 23 estudiantes de cuarto grado de primaria, con una edad aproximada de 9 y 10 años, pertenecientes a una escuela pública en la comunidad de Valencia, España. Las técnicas e instrumentos de recogida de información incluyeron el diseño de una secuencia de enseñanza digitalizada conformada por applets interactivos de GeoGebra orientados a tareas de partición, reparto y sustitutos visuales manipulables, registrando los datos mediante grabaciones de pantalla en tiempo real, captura de audio ambiental de los diálogos y notas de campo de los investigadores.

Los resultados determinaron que los applets demostraron ser altamente eficientes para desvincular la fracción de los esquemas rígidos y estáticos del papel, permitiendo que el dinamismo del software para estirar barras, rellenar sectores o modificar deslizadores facilitara la

noción de equivalencia de manera intuitiva y visual antes de introducir reglas algorítmicas. Los autores concluyeron que la retroalimentación inmediata del recurso interactivo funcionó como un tutor cognitivo que redujo la necesidad de validación formal del docente y empoderó la autonomía del alumno, demostrando que las herramientas digitales no deben ser ilustraciones electrónicas tradicionales, sino plataformas dinámicas de acción matemática que reducen significativamente la brecha de abstracción que causa el salto hacia los números racionales en la primaria media.

No obstante, la transición hacia modelos más abstractos también ha sido analizada desde la mediación de artefactos físicos bajo la perspectiva de la EMR. En este ámbito, Hurtado Moreno, Cortés Monroy y Mendoza Yela (2019) desarrollaron una investigación de diseño de enfoque cualitativo e interpretativo en el contexto colombiano para caracterizar los procesos de matematización horizontal y vertical que logran desarrollar los estudiantes de tercer grado de educación básica primaria en torno al concepto de los fraccionarios como relación parte-todo. El entramado conceptual de este estudio se alineó con “la EMR de Freudenthal (1973, 1991) y Streefland (1991), la aproximación semántica de las fracciones de Ohlsson (1988) y la teoría del rol de los artefactos de Radford (2012)” (Hurtado Moreno, Cortés Monroy y Mendoza Yela, 2019, p. 4).

Los sujetos de estudio fueron un grupo de 21 estudiantes de entre 8 y 9 años de una institución educativa pública en el municipio de Santiago de Cali, Colombia. Como técnicas e instrumentos se implementó una propuesta de aula dividida en tareas secuenciales contextualizadas en repartos y porciones, integrando el uso físico de dos artefactos específicos: el Tangram para la partición espacial y de superficies, así como las Regletas de Cuisenaire para las relaciones de longitud y conmensurabilidad; la recolección de información se realizó mediante grabaciones de video de alta definición de las interacciones, hojas de trabajo impresas individuales y notas de campo.

Los resultados indicaron que ambos artefactos actuaron exitosamente como un puente semiótico, logrando consolidar con rapidez la matematización horizontal al identificar la unidad y describir repartos en lenguaje natural. Sin embargo, el paso hacia la matematización vertical evidenció severas resistencias cognitivas, ya que a los alumnos les costó desprenderse del soporte visual y, al intentar realizar comparaciones abstractas sin el material, regresaron a las

lógicas rígidas de los números naturales o a conteos mecánicos de piezas individuales. La conclusión general de este estudio confirma que el diseño bajo la EMR dota de sentido inicial a la fracción, pero recalca que la transición hacia los niveles verticales de matematización requiere de un proceso de andamiaje docente continuo y prolongado, debido a que el pensamiento del niño a esta edad sigue fuertemente anclado a la acción física sobre el objeto.

Este hallazgo sobre las limitaciones del soporte analógico e icónico es plenamente congruente con lo expuesto por Calderón Castañeda (2022) en una investigación aplicada de nivel explicativo y enfoque cuantitativo, en donde empleó un diseño preexperimental con pretest y posttest aplicado a un solo grupo. El estudio se cuestionó en qué medida la aplicación de las formas de representación matemática influye en el aprendizaje de las fracciones en los estudiantes del cuarto grado de educación primaria en una institución educativa pública de Perú. En esta investigación, el autor utilizó como soporte teórico “el Modelo de Formas de Representación de Marshall (2010) (situacional, manipulativa, gráfica y simbólica) con la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval (2006)” (Calderón Castañeda, 2022, p. 73).

Los participantes fueron una muestra de 21 estudiantes de cuarto grado. Las técnicas e instrumentos consistieron en la encuesta y la observación sistemática del rendimiento a través de una prueba escrita pedagógica estructurada de 20 reactivos que evaluaba las dimensiones de conceptualización, identificación y resolución de problemas, además de una variable experimental compuesta por 10 sesiones de aprendizaje diseñadas para movilizar secuencialmente dichas representaciones.

Los resultados estadísticos demostraron que en el pretest el 100% de los estudiantes se ubicaba en el nivel "En Inicio", manifestando severas dificultades cognitivas. Tras la intervención, el posttest reveló cambios drásticos: el 57.14% de los alumnos alcanzó el nivel "Logrado", el 38.10% se situó en nivel "En Proceso" y solo el 4.76% permaneció en el nivel inicial, validando la hipótesis experimental con un nivel de significancia muy alto. La conclusión analítica de este autor es crítica para el presente estudio: el aprendizaje tradicional de la fracción fracasa porque suele saltar directamente al registro simbólico-numérico abstracto, demostrando que romper esa rigidez mediante el tránsito progresivo por el contexto, el objeto y el dibujo dota de verdadero significado a la representación simbólica final, aunque el enfoque centrado

exclusivamente en la relación parte-todo con cantidades continuas y discretas posee un "techo" cognitivo que dificulta la resolución de situaciones de mayor complejidad fenomenológica.

Superando las limitaciones del modelo distributivo parte-todo, los trabajos de Delgado Valdez y Aguayo Rendón (2024) representan la vanguardia en el estudio de la modelización lineal y la construcción de la fracción independiente de la unidad. A través de un experimento de diseño de enfoque cualitativo, interpretativo y fenomenológico, los investigadores se preguntaron *¿de qué manera los medios didácticos desplegados por el docente y la matematización progresiva de actividades basadas en la iteración de la unidad de medida favorecen que los alumnos de primaria constituyan objetos mentales sobre la fracción impropia, concibiéndola como independiente de la unidad de referencia?*

El núcleo epistemológico de la investigación se ancló en la “EMR de Freudenthal (1973 y 1983) y Treffers (1987), así como el concepto de constitución de objetos mentales y el subconstructo de medida e iteración de Kieren (1980) y Tzur (1999)” Delgado Valdez y Aguayo Rendón (2024, p. 38-39).

Los sujetos de estudio fueron un grupo de 23 estudiantes (10 niños y 13 niñas) de cuarto grado de primaria de una escuela pública urbana de organización completa en la ciudad de Zacatecas, México. Las técnicas e instrumentos consistieron en el diseño de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)⁶ estructurada en prácticas matemáticas, analizando específicamente la situación contextual de la "Longitud de listones" sin marcas numéricas para estimar el tamaño relativo, recolectando las evidencias a través de grabaciones de audio y video de los debates colectivos, bitácoras y hojas de trabajo impresas individuales con producciones gráficas, y notas de campo del observador.

Los resultados analíticos demostraron que el contexto de longitud permitió desvincular con éxito a los alumnos de la representación estática de las áreas circulares que suele bloquear la comprensión de los valores superiores al entero. Se identificó una evolución de las simbolizaciones en tres niveles claros: una simbiosis lenguaje-gráfico inicial, la emergencia de esquemas fraccionarios mediante barras unidas consecutivamente y la apropiación de la

⁶ La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) se fundamenta originalmente como la predicción y conjetura teórica que el docente realiza sobre el posible camino mediante el cual se desplegará el aprendizaje en el aula (Simon, 1995). Adquiere el carácter de hipotética debido a que el trayecto real y definitivo no se puede conocer con anticipación (Simon, 1995).

simbología convencional, donde comprendieron que el numerador encarna las iteraciones efectuadas y el denominador el tipo de partición. Los autores concluyeron de manera contundente que la iteración de la medida es un camino didáctico altamente efectivo para que los niños constituyan objetos mentales sólidos sobre las fracciones impropias, demostrando que la recta numérica y los modelos lineales actúan como potentes herramientas de andamiaje que promueven el tránsito de la matematización horizontal a la vertical, y que las dificultades tradicionales no son una limitante cognitiva de la edad, sino el resultado de un obstáculo didáctico provocado por la enseñanza mecanicista de la división de regiones.

La vinculación entre estas cinco investigaciones que conforman la primera unidad de análisis permite concluir que existe un consenso científico sobre la obsolescencia de los modelos pictóricos circulares como soporte principal de enseñanza. Se observa una trayectoria clara que va desde la validación de entornos digitales (Butto (2013) y Valenzuela (2016)) y la exploración de artefactos manipulativos (Hurtado (2019) y Calderón (2022)), hasta la consolidación de la fenomenología de la medida y la recta numérica como los andamios más eficaces (Delgado Valdez (2024)). Todas estas obras comparten la premisa de que la matematización horizontal requiere de situaciones con sentido donde el modelo sea una consecuencia de la actividad organizadora del alumno.

A pesar de la solidez de estos antecedentes en lo que respecta a la representación, ubicación y comparación de fracciones, se identifica un vacío investigativo crítico en la literatura actual: la mayoría de los estudios se detienen en la fase de identificación de la magnitud, omitiendo el análisis de cómo el modelo de longitud sostiene específicamente la operación de resta en los primeros años de escolaridad primaria. Existe una ausencia de evidencia empírica que documente el tránsito hacia la matematización vertical en situaciones de resta donde la recta numérica actúa como motor de redescubrimiento guiado. Es precisamente en este nudo crítico donde se inserta la presente investigación, buscando transformar el modelo de la recta en una herramienta operativa que permita al estudiante de tercer grado no solo "ubicar" la fracción, sino construir algoritmos con sentido numérico profundo.

Estrategias de Resolución y Obstáculos Epistemológicos

El estudio de la génesis del pensamiento racional en la infancia exige una revisión profunda de las estructuras de pensamiento y los errores sistemáticos que los estudiantes despliegan al

enfrentar la transición numérica hacia los fraccionarios. En este contexto, la investigación de Sanjuán Cremades (2021), titulada Estrategias de resolución de problemas de división reparto y medida con fracciones por estudiantes de Educación Primaria, aporta un pilar fundamental para la fundamentación de las intervenciones en los primeros grados de educación básica.

Metodológicamente, la autora se planteó como interrogante principal determinar *cuál es el nivel de éxito y cuáles son las estrategias cognitivas que utilizan los estudiantes de los diferentes ciclos de Educación Primaria, desde el primer hasta el sexto curso, al enfrentarse a la resolución de problemas de grupos múltiples en las variantes de división-medida y división-reparto con fracciones*. Para dar respuesta a este cuestionamiento, implementó un enfoque mixto de alcance descriptivo y transversal, estructurado intencionalmente para identificar patrones evolutivos en el razonamiento infantil ante estructuras multiplicativas.

El referente teórico del estudio se situó firmemente en la psicología transcultural del aprendizaje matemático y las estructuras de los problemas verbales, articulando las teorías de las “Estructuras Multiplicativas y Grupos Múltiples de Vergnaud (1983, 1997), los Modelos de División de Fischbein y colaboradores (1985) y la taxonomía de Líneas de Desarrollo de Estrategias Infantiles postulada por Empson (2011) y Carpenter (1999)” (Sanjuán Cremades, 2021, p. 79).

Los participantes fueron una muestra amplia de 149 estudiantes pertenecientes a la escolaridad obligatoria distribuidos de manera longitudinal a lo largo de todos los grados (de 1º a 6º) en una escuela de financiamiento público de España. Las técnicas e instrumentos consistieron en una prueba de rendimiento diagnóstico escrito compuesta por un cuestionario de cuatro problemas verbales adaptados ad hoc y graduados por niveles, donde se contrastaban simétricamente dos situaciones de división-medida y dos de división-reparto, manipulando la complejidad del lenguaje y los valores numéricos (desde fracciones unitarias en los primeros ciclos hasta fracciones propias no unitarias e impropias en el último tercio de la primaria).

Los resultados del análisis evolutivo revelaron que los alumnos del primer ciclo (1º y 2º grados) presentan un porcentaje de éxito notablemente mayor en las tareas de división-medida debido a que su estructura lineal permite el modelaje directo gráfico. En el segundo ciclo (3º y 4º grados) se identificó un equilibrio cognitivo temporal con niveles de logro equivalentes en ambas estructuras, mientras que en el tercer ciclo (5º y 6º grados) la tendencia se invirtió drásticamente,

mostrando un éxito superior en problemas de reparto por el fuerte entrenamiento algorítmico escolar con enteros. Respecto a las estrategias, en división-medida predominaron la coordinación aditiva iterada y el modelaje directo, mientras que en reparto los grados superiores aplicaron la coordinación multiplicativa algorítmica.

Un hallazgo crítico fue que los alumnos de los ciclos iniciales manifestaron una flexibilidad y variedad de estrategias creativas significativamente mayor que los de sexto grado, quienes se mostraron rígidamente supeditados a las reglas de cálculo convencional. La autora concluyó de forma general que las nociones de división-medida emergen antes e intuitivamente en el pensamiento del niño que las de división-reparto, validando la recta y la longitud como andamiajes naturales, y recomendó rediseñar los currículos para no postergar el uso de las fracciones y explotar las situaciones de medida como un puente idóneo que evite la prematura rigidización mecanicista provocada por la escuela.

Sin embargo, este progreso y flexibilidad estratégica se ven frecuentemente condicionados por barreras epistemológicas y sesgos cognitivos que persisten tenazmente a lo largo de la escolaridad. González-Forte y Fernández (2024), en su investigación titulada Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales, documentaron este fenómeno de resistencia conceptual. El cuestionamiento científico que dirigió su estudio se centró en identificar cuáles son los niveles de éxito y los razonamientos, tanto correctos como incorrectos, que manifiestan los estudiantes de educación primaria y secundaria al enfrentarse a tareas de comparación de fracciones, ordenación de decimales y representación de ambos en la recta numérica, así como describir su evolución transversal a través de los diferentes grados académicos. Los investigadores adoptaron un enfoque mixto (cualitativo y cuantitativo) mediante un diseño descriptivo y transversal (cross-sectional), idóneo para mapear y contrastar de manera simultánea las pautas argumentativas de múltiples niveles escolares en un mismo periodo temporal. Los autores refieren que el sustento epistemológico se insertó en:

las corrientes de la psicología cognitiva sobre el pensamiento numérico, sustentado en el Sesgo del Número Natural conceptualizado por Ni y Zhou (2005); Vamvakoussi (2011 y 2018); Vamvakoussi y Vosniadou (2007) y Van Dooren (2018), complementado con los Modelos de Razonamiento Erróneo de Streefland (2004) y Smith (1995 y 2005) —que

incluyen el pensamiento de brecha absoluta y el sesgo inverso del denominador—, bajo la perspectiva de las representaciones semióticas de Duval (1995) que postula a la recta numérica como un espacio interactivo de unificación conceptual (González-Forte y Fernández, 2024, p. 132),

La muestra estuvo constituida por 262 estudiantes pertenecientes al sistema educativo formal, abarcando de manera transversal desde el final de la primaria hasta el término de la secundaria obligatoria (5º y 6º de Primaria, y 1º, 2º, 3º y 4º de Educación Secundaria) en centros públicos de la provincia de Alicante, Comunidad Valenciana, España.

Como técnicas e instrumentos se empleó una prueba de diagnóstico escrito pedagógico conformada por un cuestionario estructurado con reactivos que exigían la resolución formal y la justificación escrita obligatoria de cada respuesta, evaluando tres dimensiones críticas: comparación de fracciones con numeradores y denominadores iguales y distintos (diseñadas para forzar la aparición de sesgos), comparación y ordenación de decimales, y la ubicación exacta de magnitudes en la recta numérica. El procedimiento analítico constó de una primera fase cuantitativa para determinar porcentajes de éxito y una segunda fase inductiva cualitativa para categorizar los argumentos explicativos.

Los resultados demostraron que las tareas con fracciones y su inclusión en la recta numérica representaron una dificultad abstracta exponencialmente mayor para los alumnos que la ordenación de decimales. Se comprobó cuantitativamente que el sesgo del número natural (asumir bajo una premisa incorrecta que basándose en que los términos aislados son mayores) decrece paulatinamente conforme se avanza de grado, pero no desaparece, persistiendo incluso en el último año de secundaria. Asimismo, se detectó que, al disminuir este sesgo por efecto de la instrucción algorítmica, emergen nuevos errores estructurales como el razonamiento en diferencias y el razonamiento inverso.

En lo relativo a la recta numérica, los estudiantes evidenciaron severas limitaciones, siendo incapaces de reconocer que la fracción y el decimal son expresiones alternativas de un mismo número racional, tratándolos como sistemas numéricos inconexos. Los autores concluyeron que las dificultades con los racionales son de naturaleza instructiva y estructural, determinando que los errores conceptuales mutan de tipología, pero mantienen una resistencia cognitiva notable, por lo que recomendaron urgentemente un rediseño didáctico que posicione a

la recta numérica como el eje unificador que dote al alumno de una noción de magnitud continua y escalar.

Complementando el análisis de estas barreras internas y la necesidad de andamiajes geométricos eficaces, la investigación de Guerreiro y Martínez-Jiménez (2025), titulada *Aprendiendo el modelo parte-todo de las fracciones a partir de una tarea con banderas del mundo*, ofrece una perspectiva cualitativa-fenomenológica sobre la flexibilidad y diversificación estratégica. El estudio planteó como interrogante central explorar cuáles son las estrategias de resolución, las justificaciones semióticas y los niveles de dificultad que manifiestan los estudiantes de educación básica, los futuros docentes y los profesores en servicio al enfrentarse a tareas de reparto y cálculo geométrico de superficies basadas en el modelo parte-todo utilizando banderas del mundo.

El enfoque metodológico adoptado fue cualitativo, descriptivo e interpretativo, bajo un diseño multifacético y transversal de desarrollo curricular centrado en el análisis de tareas matemáticas para evaluar cómo una misma situación de aprendizaje es decodificada por colectivos con diferentes niveles de formación matemática y pedagógica. Guerreiro y Martínez-Jiménez (2025) refieren que “el entramado conceptual se fundamentó en el Modelo parte-todo de las fracciones de Kieren (1980), así como la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1991) ligada a la geometría intuitiva como actividad organizadora del espacio” (Guerreiro y Martínez-Jiménez, 2025, p. 120).

La muestra poseía un carácter internacional y diverso, integrada por tres subgrupos distribuidos en entornos de España y Portugal: alumnado de educación básica obligatoria, profesorado en formación matriculado en los grados de Educación Primaria de la Universidad de Algarve y la Universidad de Córdoba, y profesores en servicio activo de educación básica. La técnica consistió en la implementación de una tarea contextualizada diseñada ad hoc (La Tarea de las Banderas), que consistía en presentar imágenes de banderas con configuraciones geométricas diversas (franjas horizontales, verticales, diagonales o superpuestas) bajo la consigna única de responder qué fracción de la bandera ocupaba el color rojo.

Como instrumentos de recogida de la información se utilizaron hojas de respuestas impresas donde los sujetos debían registrar la fracción estimada y realizar una justificación

gráfica (trazando líneas de partición sobre la bandera) o escrita explicativa, complementando los datos con notas de campo de los investigadores y registros fotográficos.

El análisis de las producciones permitió identificar y categorizar una tipología de seis estrategias diferenciadas de resolución: visual (estimación perceptiva), de descomposición geométrica en partes congruentes, de recomposición virtual de superficies, operacionales (uso de fórmulas o algoritmos numéricos directos), de medición física con instrumentos y de conteo aislado de secciones. Los resultados por grupos revelaron que los alumnos de educación básica recurrieron a estrategias visuales y de descomposición, pero sufrieron bloqueos cognitivos ante particiones no tradicionales (como las diagonales), denotando rigidez operativa.

Los futuros profesores evidenciaron un hallazgo crítico al abandonar el análisis geométrico intuitivo para refugiarse en estrategias operacionales numéricas abstractas, cometiendo graves errores conceptuales al no lograr coordinar su cálculo matemático con la realidad gráfica del dibujo. Las conclusiones generales del estudio determinaron que los contextos visuales y culturales de las banderas revitalizan eficazmente el modelo parte-todo, pero demostraron empíricamente que la comprensión genuina de la fracción depende estrictamente de la capacidad del sujeto para coordinar la aprehensión perceptiva con la operativa (trazar líneas virtuales o reales). Sin este andamiaje figurativo, las fórmulas abstractas inducen al error. Ante esto, los autores recomendaron unificar la enseñanza de la geometría con la aritmética de los racionales, eliminando la clásica y nociva separación curricular entre el estudio de las áreas y el concepto de fracción.

La vinculación epistemológica entre estas tres investigaciones que integran el segundo bloque de análisis permite estructurar un diagnóstico integral y crítico sobre la competencia cognitiva y operativa del estudiante en torno al número racional. Mientras que Sanjuán (2021) establece que el éxito inicial y la flexibilidad intuitiva del niño residen en el contexto de la división-medida (fenomenología lineal), González-Forte y Fernández (2024) identifica la barrera interna y persistente del sesgo del número natural que distorsiona la interpretación de dicha magnitud, y Guerreiro y Martínez-Jiménez (2025) señalan una carencia operativa y semiótica en el repertorio estratégico, caracterizada por la automatización algorítmica y la incapacidad de coordinar el registro geométrico con el numérico.

La relación profunda entre estos estudios demuestra que el problema de las fracciones en la escuela primaria no radica únicamente en una dificultad intrínseca de representación visual, sino en un desaprovechamiento sistemático de la capacidad de acción matemática del estudiante para resolver conflictos numéricos mediante modelos dinámicos de longitud y medida.

De esta manera, el estado del arte revela que el pensamiento fraccionario en la educación primaria actual se encuentra sobrediagnosticado en su preferencia hacia los modelos de medida e hipertrofiado por una enseñanza mecanicista que fija el sesgo natural y reduce el repertorio de estrategias del alumno a esquemas casi exclusivamente aditivos o de conteo estático. Se identifica, por tanto, un vacío investigativo en la literatura científica contemporánea: existe escasa documentación empírica y teórica sobre cómo la resta de fracciones, abordada desde la modelización lineal y la iteración, puede ser utilizada deliberadamente como un motor de cambio cognitivo y ruptura epistemológica.

La mayoría de los estudios se limitan a describir la identificación o comparación de la magnitud partitiva, omitiendo el análisis de las operaciones inversas en la primaria baja. Es precisamente en este nudo crítico y desatendido donde la presente investigación encuentra su alto valor potencial al proponer la resta de fracciones impropias en un tercer grado de primaria, no como un mero contenido procedimental del programa de estudios, sino como una palanca de redescubrimiento y conflicto cognitivo, con la intención de romper la inercia del sesgo del número natural y la rigidez del modelo parte-todo, forzando de manera inédita el tránsito desde una matematización horizontal intuitiva hacia una matematización vertical con profundo sentido numérico, cubriendo una dimensión operativa que la ciencia didáctica actual reporta como inexistente en las aulas.

La Práctica Docente y la Formación Bajo la EMR

Este tercer bloque de investigación desplaza el foco de atención hacia la praxis pedagógica y los marcos metodológicos que rigen la intervención en el aula. La relevancia de integrar estas investigaciones reside en la necesidad de comprender cómo el discurso del profesor, su formación en trayectorias específicas y la adopción de modelos realistas desde etapas tempranas condicionan el éxito de la alfabetización matemática. Al examinar la transición de los saberes matemáticos informales a los formales, se vuelve imperativo analizar los dispositivos didácticos y las pautas comunicativas que despliegan los docentes en servicio, puesto que la literatura

contemporánea demuestra que el fracaso en la conceptualización de los números racionales no es un problema de maduración cognitiva del alumnado, sino una consecuencia directa de las decisiones didácticas e institucionales del profesorado.

En este sentido, la investigación de González Balderas, Luna de la Rosa y Loera Serrano (2018), centrada en el diseño, desarrollo y evaluación formativa de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), aporta una perspectiva crítica sobre el saber docente en activo en el contexto de la escuela primaria mexicana. El cuestionamiento medular de dicho estudio se orientó a identificar *qué tipo de conocimientos disciplinares y didácticos poseen los profesores de tercer grado de educación primaria respecto a la enseñanza de las fracciones en el contexto de medida*, y de qué manera la puesta a prueba de una THA fundamentada en la EMR permite caracterizar y enriquecer tales saberes para superar las limitaciones de la práctica tradicional.

Para dar respuesta a esta interrogante, los autores implementaron un enfoque cualitativo con un diseño de investigación de diseño o experimento de enseñanza aplicado a la formación docente en servicio, utilizando la estructura metodológica de la THA de Simon (1995) como un dispositivo dinámico de intervención y evaluación continua.

El estudio se situó geográficamente en escuelas primarias públicas del estado de Zacatecas, México, trabajando con un grupo focalizado de tres profesores de educación primaria en servicio activo encargados específicamente del tercer grado, ciclo escolar donde el currículo nacional inaugura formalmente la instrucción de este objeto matemático. El entramado conceptual se sustentó en la EMR y la Fenomenología Didáctica de Freudenthal (1973 y 1983), el constructo de fracción-medida de Kieren (1976, 1980 y 1993), y la conceptualización de la equipartición como un obstáculo didáctico reforzado institucionalmente. Las técnicas empleadas incluyeron talleres de diseño cooperativo, observación participante de las sesiones de intervención y análisis de contenido de las interacciones y planeaciones de los docentes.

Como instrumentos medulares se estructuró la THA en fases secuenciales que involucraban tareas de estimación y comparación de longitudes mediante tiras de papel de distintos colores sin graduar, tareas de iteración de la subunidad unitaria para forzar la construcción de magnitudes mayores que la unidad, y tareas de ruptura de la equipartición tradicional basadas en el fraccionamiento lineal. Los medios de recogida de información

abarcaron grabaciones de audio y video de los talleres, bitácoras y diarios de campo de los investigadores, junto con las producciones escritas y secuencias rediseñadas por los profesores.

Los resultados de la fase diagnóstica revelaron que, inicialmente, los docentes poseían un conocimiento didáctico estrictamente limitado al modelo parte-todo tradicional mediante la división estática de círculos y cuadrados, concibiendo la equipartición no como un contenido secundario, sino como la única vía posible de instrucción, lo que reforzaba inconscientemente el sesgo en sus alumnos. No obstante, al experimentar con el impacto de la THA y el contexto de medida lineal, los tres profesores ampliaron su abanico de posibilidades de enseñanza, transitando hacia la noción dinámica de la fracción como medida.

Los docentes reconocieron la potencia didáctica de la iteración de la subunidad una cantidad determinada de veces, descubriendo que este modelo lineal facilitaba la asimilación tanto de fracciones propias como impropias en el tercer grado, desligándolas del simple conteo de pedazos. Las conclusiones del estudio determinan que las limitaciones en el aprendizaje de las fracciones en México se derivan de deficiencias en el conocimiento didáctico del contenido del profesorado, quienes suelen replicar el mecanicismo con el que fueron formados, validando a la THA como un excelente instrumento de desarrollo profesional que actúa como puente para construir objetos mentales robustos sobre las tareas infantiles, recomendando de manera obligatoria que los programas de actualización docente abandonen los enfoques abstractos y adopten la modelización lineal y la medida de la escuela holandesa.

Sin embargo, la transformación de la práctica no solo depende de la estructura técnica de la lección y del conocimiento del maestro, sino de la naturaleza de la interacción dialógica y comunicativa en el aula de matemáticas. Reséndiz Balderas y González Salazar (2018) profundizaron en esta dimensión socio-discursiva mediante una investigación que se planteó la pregunta de cuáles son los recursos discursivos, las estrategias de enseñanza y las formas de interacción social que despliega un docente de tercer grado al momento de propiciar el primer acercamiento formal de los estudiantes al objeto matemático de la fracción, así como las principales complicaciones conceptuales que emergen en dicha práctica.

Metodológicamente, el estudio adoptó un enfoque cualitativo con una perspectiva interpretativa, descriptiva y de carácter microetnográfico, recurriendo a un diseño de estudio de caso único de tipo instrumental enfocado en la práctica cotidiana de un profesor seleccionado

dentro de una escuela primaria pública de organización completa perteneciente al sistema educativo de México, interactuando con su grupo de alumnos de tercer grado. Los autores refieren que:

El sustento epistemológico y sociocultural se ancló en las teorías angulares del aprendizaje de las matemáticas como el desarrollo de un discurso de Sfard (2002) y Ball (1991) y el enfoque de la interacción en el aula y etnografía de la ciencia de Candela (1999). (Reséndiz Balderas y González Salazar, 2018, p. 3)

Para capturar la realidad del aula, se utilizó la técnica de la observación no participante de corte naturalista y el registro etnográfico de sesiones completas dedicadas a la introducción del tema. Los instrumentos y medios de recogida de información consistieron en la grabación en audio y video de alta fidelidad de las interacciones lingüísticas, la realización de transcripciones textuales exhaustivas de los diálogos generados mediante análisis del discurso, y el levantamiento de notas de campo etnográficas para documentar el uso de recursos como el pizarrón, el libro de texto y el material concreto.

Los resultados relativos a los recursos discursivos y estrategias docentes evidenciaron que la enseñanza observada depende de forma desproporcionada del pizarrón y de la exposición oral del maestro, reduciendo críticamente las oportunidades para que los alumnos experimenten con la manipulación física o modelos dinámicos. Asimismo, el discurso pedagógico del profesor se caracterizó por ser confuso, ambiguo e inconsistente, al mezclar de manera indiscriminada el vocabulario formal de los números racionales con términos informales propios de los enteros, tales como denominar "pedazos" a las partes o referirse a los componentes como "los números de arriba y de abajo", lo que impidió la constitución de un objeto mental autónomo de la fracción.

En lo que respecta a las complicaciones de los alumnos, los estudiantes manifestaron dificultades cognitivas ancladas al obstáculo de la equipartición, mostrando una marcada resistencia a comprender que las fracciones exigen que cada una de las partes de la unidad posea la misma área o magnitud de longitud, tendiendo a resolver las tareas mediante un conteo aislado, discreto y estático de partes sombreadas frente a las no sombreadas, bloqueando así la noción del continuo numérico y de la relación escalar.

Las conclusiones del estudio determinaron que las dificultades observadas en el tercer grado no se deben a una incapacidad cognitiva intrínseca de la edad infantil, sino que constituyen genuinos obstáculos didácticos de origen institucional generados por las deficiencias del discurso docente y la rigidez de las prácticas tradicionales, concluyendo que el primer acercamiento formal fracasa porque el discurso escolar reduce un objeto conceptual complejo a un mero algoritmo de división de regiones pictóricas planas, haciendo imperativo revolucionar la formación docente para diversificar los recursos discursivos e integrar situaciones del contexto real.

Por otro lado, la viabilidad de implementar modelos de modelización avanzados desde edades tempranas para evitar la consolidación de estos obstáculos tradicionales es respaldada firmemente por el trabajo de Alsina y Salgado (2019), quienes documentaron prácticas de medida bajo la perspectiva de la EMR en la Educación Infantil. La pregunta de investigación implícita que guio este trabajo se interrogó sobre cómo contribuye el diseño e implementación de experiencias de aprendizaje basadas en los principios de la EMR al descubrimiento y desarrollo inicial de nociones, vocabulario y herramientas de medida de longitud y masa en niños de Educación Infantil.

Los autores asumieron un enfoque cualitativo con una perspectiva descriptiva e interpretativa de corte fenomenológico-didáctico, utilizando un diseño de investigación-acción participativa complementado con la documentación pedagógica. Los participantes del estudio fueron un grupo de veintidós niños y niñas de tercer año de Educación Infantil, con edades comprendidas entre los cinco y seis años, pertenecientes al Centro de Educación Infantil y Primaria de Sigüeiro, ubicado en la localidad de Oroso, La Coruña, Galicia, España. El sustento conceptual se conformó por:

las directrices curriculares de los Estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos en su dimensión de medida con los principios de la escuela holandesa de Freudenthal, Treffers y Van den Heuvel-Panhuizen, enfocados en los principios de realidad, lineamiento de niveles y guiado por la reinención, además de los referentes de Chamorro (2003) sobre la construcción sensorio-motriz del espacio y las magnitudes. (Alsina y Salgado, 2019, p. 26).

Las técnicas combinaron la observación participante, el registro fotográfico sistemático y el análisis de contenido de las producciones verbales y gráficas de los infantes. El instrumento modular consistió en el diseño de dos grandes situaciones didácticas realistas contextualizadas: la primera experiencia enfocada en la medida de longitud mediante el juego de roles denominado "Hacemos de sastres" para confeccionar ropa a los juguetes del aula a través de la estimación, el uso de listones como unidades no convencionales y la introducción al metro y centímetro, y la segunda experiencia orientada a la medida de masa titulada "Hacemos de panaderos" en el taller de cocina de la escuela para elaborar pan, implicando la comparación intuitiva de pesos y la introducción formal a balanzas de platillos y básculas digitales del Sistema Métrico Decimal. Los medios de recogida de datos fueron las transcripciones de los diálogos asamblearios, las notas de campo de la docente, las fotografías del uso de los instrumentos y los dibujos justificativos de los niños.

Los resultados respecto a la noción de longitud demostraron que los infantes transitaban con éxito desde cuantificadores vagos hacia términos de comparación específicos, descubriendo de forma autónoma la necesidad de utilizar un intermediario físico como un listón para medir objetos distantes, lo que denota la interiorización de la propiedad transitiva de la igualdad. En cuanto a la masa, la manipulación directa en la experiencia del pan favoreció que los alumnos superaran el sesgo perceptivo visual de asociar mayor peso a un mayor tamaño, al tiempo que la balanza de platillos funcionó como un modelo material e instrumento de andamiaje idóneo para equilibrar cantidades y construir el sentido físico de la equivalencia numérica.

Las conclusiones generales del estudio confirmaron que los principios de la EMR son plenamente aplicables y eficientes desde la educación infantil, demostrando que la práctica de la medida constituye el contexto más orgánico y natural para dar sentido a la cuantificación matemática en la niñez temprana, concluyendo que los niños de cinco a seis años poseen plenas capacidades cognitivas para iniciarse en el uso de herramientas formales siempre y cuando el instrumento surja como una necesidad operativa para resolver un problema real del entorno, recomendando firmemente el abandono de las fichas de trabajo impresas pasivas de escritorio y su sustitución por proyectos activos y dialógicos.

El análisis de las investigaciones categorizadas en esta dimensión devela una tensión crítica en el sistema educativo actual. Mientras que Alsina y Salgado (2019) demuestran que el

enfoque realista y el contexto de la medida son accesibles y altamente significativos desde la infancia temprana, Reséndiz y González (2018) evidencian que la práctica docente real en el tercer grado de primaria suele burocratizarse e involucionar a través de un discurso confuso y restrictivo, y González Balderas (2023) ofrece la solución técnica y metodológica mediante el uso de trayectorias hipotéticas de aprendizaje orientadas a que el profesor supere el obstáculo didáctico de la equipartición. Al situar estas obras en una misma dimensión analítica, se construye el argumento epistemológico de que el éxito de una intervención sobre la enseñanza de las fracciones no depende exclusivamente de la tarea diseñada de forma aislada para el alumno, sino de la capacidad de dicha estructura para transformar radicalmente la mediación discursiva del docente, transitando de una enseñanza tradicional basada en el decir a una práctica fundamentada en el hacer matemático y en la modelización progresiva.

No obstante, se identifica un vacío investigativo en la literatura actual: a pesar de la efectividad de las trayectorias de aprendizaje informadas por la EMR para identificar y enriquecer los saberes docentes en torno a la fracción-medida, no se encontraron experiencias documentadas donde los procesos de suma y resta de fracciones impropias bajo el enfoque de la matematización vertical actúen como el eje de intervención y el dispositivo didáctico de ruptura que fuerce de manera simultánea al docente a transformar su discurso interactivo en el aula y al alumno de tercer grado de primaria a consolidar un algoritmo con sentido.

Ubicación del Objeto de Estudio

En la revisión sistemática realizada para la construcción del presente estado del arte, se partió de comprender este ejercicio como una investigación documental crítica orientada a identificar el nivel de desarrollo, los enfoques, las tensiones didácticas y las tendencias contemporáneas existentes en torno al aprendizaje de los números racionales, la constitución de objetos mentales sobre la fracción en la educación básica, la mediación discursiva del profesorado y la implementación de la EMR como alternativa al mecanicismo tradicional.

El análisis reflexivo y la cartografía conceptual de la literatura seleccionada permitió reconocer no solo los aportes epistemológicos que sustentan las investigaciones de la última década, sino también las complejas rutas metodológicas que han seguido distintos autores en contextos de Iberoamérica, sirviendo como plataforma para delimitar las coordenadas científicas de la problemática en el aula de tercer grado de primaria.

A partir de la información sistematizada en el corpus documental de este estado del arte, se identificó que los estudios revisados presentan una notable diversidad metodológica, cuya naturaleza responde directamente a las dimensiones analíticas del objeto matemático de la fracción. Predominan los enfoques cualitativos de corte interpretativo, descriptivo, microetnográfico y de fenomenología didáctica en aquellas investigaciones íntimamente ligadas a la escuela holandesa de Freudenthal y al análisis de las interacciones lingüísticas en el aula, como se constata de forma fehaciente en los trabajos de Delgado Valdez y Aguayo Rendón (2024), Reséndiz Balderas y González Salazar (2018), y Alsina y Salgado (2019).

En estas obras, el diseño metodológico se inclina marcadamente por los experimentos de diseño, los estudios de caso únicos instrumentales y la documentación pedagógica participativa, apoyados técnicamente en herramientas de recogida de datos de alta fidelidad como grabaciones de audio y video, transcripciones exhaustivas orientadas al análisis del discurso, notas de campo etnográficas, registros fotográficos de la praxis y el análisis de contenido de las producciones gráficas, verbales y simbólicas de los estudiantes e infantes.

Paralelamente, se identificaron estudios que incorporan diseños cuantitativos o mixtos de corte experimental, preexperimentales, correlacionales y transversales, enfocados en medir los niveles de éxito, la influencia de registros semióticos y la evolución cronológica de los razonamientos erróneos. Tal es el caso de las indagaciones de González-Forte y Fernández (2024), Calderón Castañeda (2022) y Sanjuán Cremades (2021), quienes privilegian la aplicación de pruebas estandarizadas de entrada y salida, cuestionarios diagnósticos estructurados y rúbricas de evaluación analítica para procesar estadísticamente el sesgo del número natural y las dificultades de transición numérica en los ciclos avanzados de la educación primaria.

Asimismo, las investigaciones de diseño formativo aplicadas al magisterio, como la trayectoria hipotética de aprendizaje puesta a prueba por González Balderas, Luna de la Rosa y Loera Serrano (2023) combinan de forma propositiva el taller cooperativo y la observación participante como vías para caracterizar y enriquecer el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de tercer grado frente a los obstáculos institucionales.

En lo relativo a los referentes teóricos que nutren este campo de conocimiento, se observa que las investigaciones de vanguardia declaran de manera explícita y rigurosa sus marcos conceptuales, situando la discusión en la intersección de la didáctica fundamental de las

matemáticas y la psicología cognitiva. Sobresale como eje vertebral e integrador la EMR, sustentada en los postulados de Freudenthal (1973, 1983), Treffers (1987) y otros, la cual defiende que las matemáticas constituyen una actividad humana de matematización progresiva y que el contexto de la medida y la modelización lineal representan los andamiajes más potentes para superar de manera orgánica el modelo parte-todo tradicional.

Tabla 1.

Elementos sustantivos de documentos revisados en el estado del arte

Autor(es)	Referente Teórico	Enfoque	Método	Técnicas e instrumentos
Butto Zarzar (2013)	Subconstructos de Kieren, Campos Conceptuales de Vergnaud y Transposición Didáctica	Cualitativo	Estudio de intervención pedagógica en tres etapas	Cuestionarios (inicial/final), entrevistas clínicas piagetianas y secuencia didáctica bimodal (Lápiz-Papel / Enciclomedia)
Valenzuela, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto (2016)	Modelos Teóricos Locales (Fillooy), Subconstructos de Kieren y Fenomenología Didáctica (Freudenthal)	Cualitativo y Fenomenológico	Experimento de diseño (Modelo Teórico Local sistémico)	Applets interactivos en GeoGebra (secuencia digitalizada), grabación de pantallas en tiempo real, registros de audio ambiental y notas de campo
Hurtado, Cortés y Mendoza (2019)	Educación Matemática Realista (EMR), Aproximación Semántica (Ohlsson) y Rol de los Artefactos (Radford)	Cualitativo e Interpretativo	Experimento de diseño (Tres fases cíclicas de aula)	Propuesta de aula contextualizada (Tangram y Regletas de Cuisenaire), grabaciones de video en alta definición, hojas de trabajo (bitácoras)

				escritas) y notas de campo
Calderón Castañeda (2022)	Formas de Representación (Marshall) y Representaciones Semióticas (Duval)	Cuantitativo	Investigación aplicada de nivel explicativo (Diseño preexperimental con pretest/posttest)	Encuesta y observación del rendimiento mediante prueba escrita objetiva (20 reactivos cognitivos) y programa experimental de 10 sesiones
Delgado Valdez y Aguayo Rendón (2024)	Educación Matemática Realista, Constitución de Objetos Mentales (Freudenthal) e Iteración de la Medida (Kieren/Tzur)	Cualitativo, Interpretativo y Fenomenológico	Experimento de diseño (Fases cíclicas en el marco de una TEDE)	Secuencia instruccional de longitud de listones (THA), grabaciones de audio y video, bitácoras u hojas de trabajo individuales y notas de campo
Sanjuán Cremades (2021)	Estructuras Multiplicativas (Vergnaud/Greer), Modelos de División (Fischbein) y Estrategias Infantiles (Empson/Carpenter)	Mixto (Cualitativo y Cuantitativo)	Estudio ex post facto empírico, descriptivo y transversal	Prueba de rendimiento escrita mediante cuestionario ad hoc adaptado de 4 problemas verbales (división-medida y división-reparto)
González-For te y Fernández (s.f.)	Sesgo del Número Natural (Ni/Zhou), Gap Thinking, Reverse Bias (Streefland) y Representaciones Semióticas (Duval)	Mixto (Cualitativo y Cuantitativo)	Estudio descriptivo y transversal (Cross-sectional)	Prueba de diagnóstico escrito pedagógico y análisis inductivo-argumentativo de las justificaciones producidas mediante cuestionario estructurado

Guerreiro y Martínez-Jiménez (2025)	Modelo Parte-Todo (Kieren/Behr), Representaciones Semióticas (Aprehensiones de Duval) y Fenomenología (Freudenthal)	Cualitativo, Descriptivo, Interpretativo y Fenomenológico	Estudio transversal de desarrollo curricular y análisis de tareas	Tarea de las Banderas diseñada ad hoc, hojas de respuestas impresas con justificación gráfica/textual, notas de campo y registros fotográficos
González Balderas, Luna de la Rosa y Loera Serrano (s.f.)	Educación Matemática Realista, Fenomenología (Freudenthal), Fracción-Medida (Kieren/Simon) y Equipartición como Obstáculo	Cualitativo, Descriptivo, Crítico e Interpretativo	Investigación de diseño / Experimento de enseñanza aplicado a la formación docente	Talleres de diseño cooperativo, observación participante y análisis de contenido mediante THA (tiras de papel, tareas de estimación, iteración y ruptura)
Reséndiz Balderas y González Salazar (2018)	Desarrollo de un Discurso (Sfard/Ball), Interacción sociocultural (Candela) y Obstáculos de la Fracción (Kieren/Behr)	Cualitativo, Interpretativo, Descriptivo y Microetnográfico	Estudio de caso único de tipo instrumental	Observación no participante naturalista, grabaciones de audio y video, transcripciones detalladas de análisis del discurso y notas de campo
Alsina y Salgado (2019)	Educación Matemática Realista (Freudenthal), Estándares de Medida del NCTM y Didáctica de la Medida (Chamorro/Piaget)	Cualitativo, Descriptivo e Interpretativo	Investigación-acción participativa y documentación pedagógica	Observación participante, análisis de producciones verbales/gráficas mediante unidades didácticas realistas (hacemos de

En conjunto, el análisis de las investigaciones revisadas permitió identificar avances significativos en la comprensión didáctica del aprendizaje de las fracciones desde la perspectiva de la EMR y la fenomenología de la medida. Los estudios analizados coinciden en señalar que los modelos lineales, particularmente la recta numérica, constituyen herramientas más potentes que los enfoques tradicionales centrados exclusivamente en la relación parte-todo, ya que favorecen la construcción de objetos mentales más flexibles y comprensivos sobre el número racional. Asimismo, las investigaciones evidencian que las situaciones contextualizadas, los ambientes interactivos y las tareas de medida posibilitan procesos de matematización horizontal que permiten al estudiante construir significado antes de acceder a la formalización simbólica.

Otro aporte relevante identificado en la literatura consiste en el reconocimiento de diversos obstáculos cognitivos presentes en el aprendizaje de las fracciones, especialmente el sesgo del número natural, la dependencia de estrategias aditivas y las dificultades para comprender relaciones de magnitud y equivalencia. Estos hallazgos resultan fundamentales para la presente investigación, ya que permiten comprender que las dificultades en la suma y resta de fracciones no derivan únicamente de la complejidad operativa del algoritmo, sino de la persistencia de estructuras de pensamiento construidas desde los números enteros. Del mismo modo, las investigaciones revisadas destacan la importancia de la mediación docente y de las trayectorias de aprendizaje fundamentadas en la EMR como elementos indispensables para promover procesos de comprensión con sentido.

No obstante, pese a la solidez teórica y metodológica de los antecedentes revisados, también se identificaron vacíos importantes en la literatura especializada. La mayoría de los estudios se concentra en la representación, comparación y ubicación de fracciones, así como en contextos de medida y reparto, dejando escasamente documentados los procesos vinculados con la suma y, particularmente, la resta de fracciones impropias en estudiantes de los primeros grados de educación primaria. De igual forma, existe una ausencia de investigaciones que analicen cómo la resta puede funcionar como una estrategia de ruptura cognitiva capaz de favorecer el tránsito de la matematización horizontal hacia la matematización vertical mediante el uso de modelos de longitud y recta numérica.

En este sentido, la presente investigación encuentra su relevancia y originalidad al proponer la suma y resta de fracciones como procesos de redescubrimiento guiado sustentados en la fenomenología de la medida y la EMR. El estudio busca contribuir a la construcción de propuestas didácticas que permitan superar la mecanización algorítmica y favorecer una comprensión profunda del número racional en estudiantes de tercer grado de primaria.

Capítulo II. Marco Teórico Conceptual

El presente capítulo tiene como propósito presentar los referentes teóricos y conceptuales que sustentan esta investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la suma y resta de fracciones en tercer grado de primaria. Su función es dotar al investigador de las categorías analíticas necesarias para examinar el fenómeno bajo estudio: el complejo tránsito cognitivo que realizan los estudiantes desde los significados iniciales e intuitivos de la fracción hasta el proceso algorítmico formal de sus operaciones.

El núcleo de este marco teórico conceptual es la noción de matematización como una actividad humana y estructurante, conceptualizada por la corriente de la EMR. En este sentido, el hilo conductor de la revisión teórica se teje alrededor de la transición entre la matematización horizontal y la vertical. Se busca comprender cómo los andamiajes informales y las representaciones arraigadas en la realidad del alumno pueden evolucionar progresivamente hacia modelos abstractos y herramientas operacionales que transformen la enseñanza tradicional del algoritmo fraccionario.

El marco teórico se organiza en tres categorías principales. La primera aborda *la construcción del número fraccionario en la educación primaria*, enfatizando las dificultades que enfrentan los estudiantes al transitar del conteo discreto de los números naturales hacia la densidad de las fracciones. La segunda recupera los *fundamentos de la Educación Matemática Realista (EMR)* como perspectiva didáctica que orienta la intervención. Finalmente, la tercera categoría profundiza en los *procesos de matematización horizontal y vertical*, los cuales permiten comprender cómo los alumnos pasan de estrategias informales a formas más estructuradas de razonamiento matemático.

A lo largo del capítulo se recuperan aportaciones de autores como Freudenthal (1973 y 1983), De Lange (1987), Treffers (1987), Gravemeijer (1994 y 1999), Streefland (1991), Fandiño Pinilla (2014), Llinares y Sánchez (1997), y Zolkower, B., & Bressan, A. (2012), quienes han investigado la enseñanza de las fracciones y los procesos de construcción del pensamiento matemático en contextos escolares.

Este apartado no sólo delimita el aparato conceptual de la investigación, sino que proporciona elementos fundamentales para argumentar que el aprendizaje significativo de la suma y resta de fracciones no es un suceso espontáneo, sino el resultado de un tránsito guiado, intencional y reflexivo que eleva el pensamiento del alumno desde la riqueza horizontal de su realidad hasta la potencia vertical de la abstracción matemática.

La Construcción del Número Fraccionario en Educación Primaria

La enseñanza de las fracciones en educación primaria representa uno de los mayores retos en el aprendizaje matemático, ya que implica que los estudiantes modifiquen algunas ideas que han construido previamente sobre los números naturales. Mientras que los números enteros permiten contar objetos “completos”, las fracciones introducen nuevas formas de representar cantidades, relaciones y medidas.

En este proceso, los alumnos suelen enfrentar diversas dificultades relacionadas con la comprensión de la unidad, el significado de las partes y la relación entre numerador y denominador. Estas dificultades no deben entenderse únicamente como errores de cálculo, sino como parte del proceso de construcción del pensamiento matemático.

Desde esta perspectiva, el aprendizaje de las fracciones requiere que los estudiantes desarrollen nuevas formas de interpretar situaciones de reparto, medición y comparación. Por ello, distintos autores señalan la importancia de trabajar las fracciones a partir de contextos significativos y cercanos a la experiencia de los niños, favoreciendo que construyan sentido antes de introducir procedimientos formales.

La presente categoría se organiza en cuatro subcategorías. En primer lugar, se aborda el *tránsito de los números naturales a los racionales*, colocando la mirada en el subconjunto de las fracciones, con el propósito de comprender las dificultades que enfrentan los alumnos al pasar de una lógica basada en cantidades enteras a otra donde las cantidades pueden dividirse y representarse de distintas maneras.

Posteriormente, se analizan los *diferentes significados de la fracción*, particularmente la fracción como parte-todo, se problematiza el reduccionismo pictórico, tradicionalmente

enseñado en las instituciones de educación básica, se plantea la riqueza de la fracción como medida y cociente, debido a que cada uno de estos significados aporta elementos importantes para la comprensión del número fraccionario.

En un tercer momento, se recuperan algunos *obstáculos frecuentes en el aprendizaje de las fracciones*, como el uso inadecuado de estrategias propias de los números naturales o la dependencia excesiva de representaciones gráficas tradicionales, por ejemplo, el modelo de la “pizza”. Finalmente, se aborda la *comprensión de la unidad de referencia*, aspecto fundamental para que los estudiantes puedan reconocer que el valor de una fracción depende del entero que se toma como referencia. Esta idea resulta especialmente importante para avanzar hacia la comprensión de fracciones impropias y del proceso de matematización que orienta esta investigación.

El Tránsito de los Números Naturales a los Fraccionarios

El ingreso al dominio de los números fraccionarios constituye uno de los desafíos cognitivos y didácticos más complejos de la educación básica. En el plano de la práctica educativa, suele asumirse erróneamente que la introducción de las fracciones representa una continuidad lineal del campo numérico aditivo; sin embargo, el aprendizaje de las fracciones implica que los estudiantes amplíen la manera en que comprenden los números y las cantidades. Mientras que en los primeros años escolares predominan los números naturales, las fracciones introducen situaciones en las que una cantidad puede dividirse, compararse o representarse de diferentes formas.

Los números naturales se rigen por la propiedad de la discreción: cada número posee un sucesor único y bien definido ($n+1$), lo que permite que el conteo actúe como la herramienta primigenia de organización matemática. Por el contrario, el conjunto de los números racionales es denso; es decir, entre dos fracciones cualesquiera coexiste una cantidad infinita de números. Como consecuencia, el andamiaje del conteo directo se “rompe”, invalidando la estrategia de la secuenciación ordinalizada. Al respecto, Fandiño Pinilla (2014) acota que la pérdida de la noción de “número siguiente” desestabiliza la competencia de estimación del alumno.

Este cambio suele generar dificultades porque muchos alumnos intentan resolver problemas con fracciones utilizando las mismas reglas que emplean con los números enteros,

dado que, en este universo de los números naturales, el estudiante internaliza la regularidad de que la suma "siempre aumenta" y la resta "siempre disminuye". Al transitar al campo fraccionario, estas preconcepciones intuitivas entran en conflicto, obligando al pensamiento a transitar desde un enfoque centrado en la acumulación de unidades hacia uno fundamentado en relaciones proporcionales y de medida. Por ejemplo, es frecuente que sumen numeradores y denominadores directamente o que interpreten el denominador como una cantidad fija de partes que no puede superarse.

Freudenthal (1983) problematiza conceptualmente esta transición al contrastar la abstracción del objeto matemático formalizado con las necesidades de su reconstrucción mental en el aula. Tal es el caso de la expresión $\frac{2}{3}$ o la operación $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ las cuales no deben ser leídas como una instrucción procedimental ("toma una unidad, pártela en tres y selecciona dos"), sino como el surgimiento de un nuevo objeto numérico con entidad propia.

Desde esta perspectiva, la enseñanza tradicional de las fracciones suele incurrir en la denominada "inversión antididáctica", es decir, la presentación del algoritmo desvinculado de la realidad que le infunde sentido. Cuando a un alumno de tercer grado se le fuerza a mecanizar el algoritmo de la suma de fracciones sin haber agotado las estrategias informales de reparto o medición, se genera una ilusión de competencia que se desmorona ante cualquier demanda de justificación o cambio de contexto. Alagia et al. (2005) afirman que esta inversión genera una barrera en el aula, puesto que reduce el éxito matemático a la memorización de reglas algorítmicas, marginando a aquellos estudiantes que requieren construir sus propios procesos a través de la acción práctica.

El tránsito de los números naturales a los racionales exige desplegar procesos de organización en dos dimensiones articuladas: la matematización horizontal y la vertical, como describe De Lange (1987), matematizar implica una actividad estructurante mediante la cual el sujeto organiza y dota de sentido matemático a un problema proveniente de un contexto realista. En la fase horizontal, el estudiante moviliza sus recursos intuitivos y el lenguaje cotidiano ante situaciones de distribución equitativa o medición longitudinal. No obstante, para consolidar el tránsito al plano racional, es indispensable propiciar la matematización vertical, caracterizada por la formalización y el refinamiento de modelos.

Autores como Freudenthal (1983), Llinares y Sánchez (1997) y Fandiño Pinilla (2014) señalan que estas dificultades forman parte del proceso de construcción del pensamiento fraccionario. Desde la EMR, se considera que el aprendizaje de las fracciones debe construirse mediante situaciones que permitan a los alumnos explorar, representar y discutir diferentes maneras de resolver problemas relacionados con repartos, medidas y comparaciones.

El paso de $\{N\}$ a $\{Q\}$ no se decreta por la aparición de un nuevo tema en el plan de estudios curriculares; se conquista a través de la evolución progresiva de los esquemas de representación del niño. El error sistemático del alumno de tercer grado al sumar de forma directa numeradores y denominadores $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}\right)$ no es una mera distracción procedimental; es la manifestación empírica del sesgo del número natural operando sobre una estructura que no comprende.

El estudiante, anclado en su pensamiento discreto previo, trata a los componentes de la fracción como entidades de conteo independientes. Llinares Ciscar y Sánchez García (1997) explican que este fenómeno obedece a que el alumno transfiere las propiedades de los números enteros al campo fraccionario de forma automática, ignorando que el denominador no representa una cantidad absoluta de objetos, sino el orden y la magnitud de la subdivisión unitaria.

En este sentido, la intervención didáctica fundamentada en la EMR debe, por tanto, diseñar situaciones privilegiando el uso de materiales como tiras de papel, rectas numéricas o diagramas de barra, favoreciendo que los estudiantes comprendan que las fracciones no son únicamente “partes de una figura”, sino números que permiten representar cantidades y relaciones. Así, el tránsito de los números naturales a los racionales no consiste solamente en aprender nuevos algoritmos, sino en desarrollar una comprensión más flexible de las cantidades y de las relaciones matemáticas.

Los Significados de la Fracción en Educación Primaria

La comprensión de las fracciones en educación primaria no depende únicamente de que los estudiantes aprendan a identificar numeradores y denominadores o a resolver operaciones. Su aprendizaje implica construir distintos significados sobre lo que representa una fracción y cómo puede utilizarse en diferentes situaciones.

Autores como Fandiño Pinilla (2014) y Llinares y Sánchez (1997) coinciden en que uno de los principales problemas en la enseñanza de las fracciones es que, con frecuencia, se reducen únicamente al modelo parte-todo, especialmente mediante representaciones circulares como pizzas o pasteles divididos en partes iguales. Aunque estas representaciones pueden ser útiles en los primeros acercamientos, resultan insuficientes para desarrollar una comprensión más amplia del número fraccionario. Desde la perspectiva de la EMR, las fracciones deben abordarse como un concepto que puede adquirir distintos significados dependiendo de la situación en la que se utilice. Entre los más importantes se encuentran la fracción como parte-todo, como medida y como cociente.

La fracción como parte-todo es generalmente la primera aproximación que tienen los alumnos. En este significado, la fracción representa una o varias partes iguales de una unidad dividida. Por ejemplo, cuando un pastel se divide en cuatro partes iguales y se toman tres, se representa la fracción tres cuartos. Este enfoque permite introducir la idea de partición y de igualdad de las partes; sin embargo, si la enseñanza se limita únicamente a este modelo, los estudiantes pueden desarrollar interpretaciones rígidas sobre las fracciones. Al respecto, Llinares Ciscar y Sánchez García (1997) advierten que cuando la enseñanza se centra de manera obsesiva en el modelo parte-todo, se restringe la comprensión del niño a situaciones estáticas de sombreado de figuras geométricas, lo que impide que la fracción evolucione hacia una estructura numérica flexible y aplicable a contextos operacionales y de cambio.

Freudenthal (1983) somete a una rigurosa crítica este reduccionismo, refiriéndose a él bajo la metáfora de la fracción como "fracturadora":

En el acercamiento de la *fracción como fraccionador*, la fracción es un operador que cambia un [número] entero en una parte de éste, o un conjunto a un subconjunto. Es una acción concreta o mental efectuada en objetos concretos o mentales. La fracción no es un objeto en sí mismo, sino un mediador entre objetos (Freudenthal, 1983, p. 140).

El estudiante de tercer grado que es instruido bajo este enfoque no concibe a $\frac{3}{4}$ como una entidad cuantitativa única, sino como dos números naturales aislados que operan mediante una acción física (cortar cuatro trozos y tomar tres). Fandiño Pinilla (2014) señala que el arraigo del modelo parte-todo fragmenta la psique del estudiante al habituarlo a ver la fracción como una

yuxtaposición de dos números enteros independientes ("el de arriba" y "el de abajo"), lo que constituye la raíz del sesgo del número natural y desata la posterior tendencia a sumar los numeradores y denominadores entre sí, respectivamente.

Esta desconexión origina una de las dificultades más frecuentes en donde los alumnos llegan a pensar que las fracciones solo existen como “pedazos” de figuras o que el denominador representa un límite fijo de partes que no puede superarse. Estas situaciones generan en el alumnado, obstáculos posteriores para acceder a la comprensión de fracciones impropias, equivalencias o relaciones entre magnitudes.

Por ello, Fandiño Pinilla (2014), y Llinares y Sánchez (1997) destacan la importancia de incorporar el significado de la fracción como medida. En este caso, la fracción no se interpreta únicamente como una parte de una figura, sino como una cantidad que puede ubicarse en una recta numérica o utilizarse para medir una longitud, una distancia o una magnitud continua. El uso de tiras de papel, segmentos o rectas numéricas favorece que los estudiantes comprendan que las fracciones son números y que pueden compararse, ordenarse y extenderse más allá de una sola unidad.

En particular, la EMR propone trabajar el significado de la fracción como medida, la cual se origina a partir de la necesidad de cuantificar una magnitud continua (longitud, área, tiempo) que no puede ser expresada de manera exacta mediante múltiplos enteros de la unidad de medida inicial. Aquí, la fracción unitaria $\frac{1}{n}$ se constituye como una nueva unidad secundaria que se repite o itera para determinar la extensión de un objeto.

Tal como explican Llinares Ciscar y Sánchez García (1997), la fracción como medida permite al estudiante romper con la rigidez del todo estático, dado que la unidad puede repetirse indefinidamente, facilitando una asimilación natural de las fracciones impropias mediante la extensión lineal del intervalo de medición. Como señalan Zolkower y Bressan (2012), la EMR postula que el conocimiento matemático cobra sentido cuando se presenta como una respuesta organizada a fenómenos reales. Al colocar al estudiante ante situaciones de medición longitudinal —utilizando andamios como cintas métricas, reglas o calibres—, la fracción se

desvincula de la representación estática del pastel y se transforma en un objeto numérico dinámico y continuo.

Asimismo, la fracción como cociente permite interpretar las fracciones en situaciones de reparto. En este contexto, la fracción $\frac{a}{b}$ plantea una situación de reparto equitativo, donde "a" elementos se distribuyen equitativamente entre "b" receptores. La diferencia entre el parte-todo y el cociente radica en que, en este último, la operación de división adquiere un carácter numérico abstracto: la fracción ya no es la representación visual de un trozo de pizza, sino el número que resuelve algebraicamente la ecuación $bx = a$.

Fandiño Pinilla (2014) enfatiza que la fracción como cociente resignifica la naturaleza del error en el aula; cuando un alumno de tercer grado comprende que la fracción es el cociente resultante de una distribución equitativa, asimila que la barra fraccionaria no es una división gráfica, sino un operador numérico que altera cualitativamente la naturaleza divisoria de los números en interacción. Por ejemplo, cuando tres chocolates deben repartirse entre cuatro niños, la fracción representa la cantidad que corresponde a cada uno. Este significado ayuda a que los alumnos comprendan la relación entre división y fracción, fortaleciendo el sentido numérico y la comprensión de las operaciones.

Fandiño Pinilla (2014), Freudenthal (1983) y Llinares y Sánchez (1997) señalan que la comprensión de las fracciones requiere articular estos diferentes significados y no limitar la enseñanza a representaciones aisladas o mecánicas. Desde esta perspectiva, el aprendizaje de las fracciones debe favorecer que los estudiantes construyan relaciones entre distintas formas de representación y desarrollen una comprensión flexible del concepto.

En consecuencia, la enseñanza de las fracciones en tercer grado de primaria requiere diseñar situaciones didácticas que permitan a los alumnos explorar diferentes contextos de reparto, medición y comparación, promoviendo que las fracciones adquieran sentido dentro de experiencias matemáticas significativas.

Obstáculos en el Aprendizaje de las Fracciones: del Sesgo de los Números Enteros a la Rigidez del Modelo Pictórico

El aprendizaje de las fracciones en la educación primaria implica enfrentar diversas dificultades y obstáculos⁷ relacionados con la manera en que los estudiantes interpretan los números y las operaciones matemáticas. Estas dificultades forman parte del proceso de construcción del pensamiento fraccionario y han sido ampliamente estudiadas por distintos autores de la didáctica de las matemáticas.

En el caso de los números fraccionarios, los alumnos de educación primaria se enfrentan a verdaderas dificultades críticas y rupturas que la enseñanza tradicional suele ignorar, asumiendo una falsa continuidad lineal que desemboca en lo que Freudenthal (1983) cataloga como una profunda "*pobreza fenomenológica*".⁸ Uno de los obstáculos más frecuentes es el denominado *sesgo del número entero*⁹. Este ocurre cuando los alumnos intentan comprender y resolver situaciones con fracciones utilizando las mismas reglas y razonamientos que emplean con los números naturales. Debido a que durante los primeros años escolares los estudiantes trabajan principalmente con cantidades enteras, tienden a trasladar estas ideas al campo de las fracciones.

Como señala Fandiño Pinilla (2014), este sesgo provoca que muchos alumnos interpreten las fracciones desde una lógica propia de los números naturales, aplicando procedimientos de manera mecánica. Un ejemplo común ocurre cuando los estudiantes suman numeradores y denominadores directamente $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}\right)$, como si se tratara de cantidades independientes, sin considerar la relación que existe entre las partes y la unidad de referencia. El alumno asume que el numerador suma objetos escogidos ("uno más uno son dos") y el denominador suma las

⁷ Entendidos no como la ausencia de información o un vacío procedimental; representa un sistema de conocimientos previos, lógicos y funcionales para un dominio matemático específico (como los números naturales), que entra en contradicción directa al ser aplicados a un nuevo dominio conceptual más amplio, como lo son los números racionales (Bachelard, 1938)

⁸ Freudenthal (1983) acuña el término "pobreza fenomenológica" (*phenomenological poverty*) para denunciar la privación de significados y contextos reales a la que la instrucción tradicional somete a los conceptos matemáticos. En la EMR, un objeto matemático adquiere sentido para el alumno en la medida en que funciona como una herramienta organizadora de un conjunto de fenómenos del mundo real o de entornos imaginables (de Lange, 1987; Lázaro Guillermo et al., 2024).

⁹ El "sesgo del número entero" (*whole number bias*) es un concepto profusamente teorizado en la psicología de la educación matemática (Ni & Zhou, 2005) que describe la tendencia sistemática e involuntaria de los estudiantes a transferir erróneamente las propiedades sintácticas, semánticas y operacionales de los números naturales ($\{N\}$) al campo conceptual de los números racionales ($\{Q\}$).

subdivisiones físicas disponibles ("tres más tres son seis"), evidenciando una ejecución totalmente desconectada de la noción de magnitud o unidad de referencia.

Desde esta perspectiva, los errores no deben entenderse únicamente como fallas en la ejecución de algoritmos, sino como manifestaciones de formas particulares de razonamiento matemático que los alumnos han construido previamente. Por ello, resulta importante que la enseñanza permita confrontar esas ideas mediante situaciones que favorezcan la reflexión y la construcción de nuevos significados.

Otro obstáculo frecuente en el aprendizaje de las fracciones es la dependencia excesiva de representaciones pictóricas tradicionales, especialmente aquellas basadas en figuras circulares o modelos de "pizza". Aunque este tipo de recursos puede facilitar un primer acercamiento al concepto de fracción, su uso constante puede limitar la comprensión de otros significados más amplios. De Lange (1987) advierte que, si bien los contextos y las visualizaciones son el motor de arranque de la conceptualización, su esquematización debe evolucionar.

Cuando las fracciones se trabajan únicamente como partes coloreadas de una figura, algunos estudiantes llegan a pensar que las fracciones solo existen dentro de objetos divididos visualmente. Esto dificulta posteriormente la comprensión de las fracciones como números que pueden representarse en una recta numérica, utilizarse para medir magnitudes o expresar relaciones entre cantidades. Al respecto, Llinares Ciscar y Sánchez García (1997) señalan que esta rigidez en las representaciones puede obstaculizar el desarrollo de un pensamiento matemático más flexible, especialmente cuando los alumnos deben resolver problemas relacionados con equivalencias, comparación de fracciones o fracciones impropias.

En situaciones donde la cantidad excede la unidad (fracciones mixtas o impropias), el dibujo tradicional del círculo pierde toda operatividad matemática. El estudiante no logra concebir cómo "tomar 5 pedazos de una pizza que solo tiene 4", manifestándose aquí el obstáculo de la *equipartición estática* (la incapacidad de concebir que la fracción es un operador dinámico de la medida capaz de iterarse de forma infinita más allá de las fronteras físicas de un solo objeto). Fandiño Pinilla (2014) complementa este análisis advirtiendo que la rigidez pictórica y el abuso de la metáfora del "pastel" limitan la comprensión de la densidad y

continuidad numérica, donde el alumno que depende del soporte icónico no puede operar la resta de fracciones heterogéneas, porque su mente intenta realizar restas mediante el tachado visual de pedazos de áreas inconexas.

Para lograr propiciar el tránsito de la matematización horizontal a la vertical, la EMR propone diversificar los contextos y representaciones utilizados en el aula. El uso de tiras de papel, rectas numéricas, mediciones y situaciones de reparto favorece que los estudiantes construyan significados más amplios sobre las fracciones y comprendan que estas no dependen únicamente de figuras geométricas. Como sintetizan Zolkower y Bressan (2012), la EMR no asume los errores como fallas, sino como síntomas de la aplicación de teorías locales que deben ser confrontadas mediante la interacción social y el conflicto cognitivo.

En este escenario, reconocer los obstáculos presentes en el aprendizaje de las fracciones permite comprender mejor las estrategias y dificultades de los alumnos, así como diseñar propuestas didácticas que favorezcan la construcción progresiva del sentido numérico y de relaciones matemáticas más flexibles.

La Comprensión de la Unidad de Referencia

Uno de los aspectos más importantes y, al mismo tiempo, más complejos en el aprendizaje de las fracciones es la comprensión de la unidad de referencia. Diversos autores señalan que las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con fracciones se relacionan con la manera en que interpretan el “entero” o la unidad a partir de la cual se construyen las partes fraccionarias. En los números naturales, la unidad suele mantenerse estable y visible; sin embargo, en el caso de las fracciones, la unidad puede cambiar dependiendo de la situación planteada. Esto implica que los alumnos deben comprender que el valor de una fracción depende del entero que se toma como referencia.

La unidad ya no es simplemente un objeto concreto que se cuenta, sino una magnitud de referencia continua o discreta que define de manera unívoca el valor relativo de cualquier expresión fraccionaria. La literatura de la EMR subraya que una de las mayores deficiencias en el aula es dar por sentada la comprensión de la unidad, omitiendo que su reconstrucción mental exige un alto nivel de abstracción. Al respecto, Llinares Ciscar y Sánchez García (1997) postulan

que la construcción del sentido fraccionario pasa por comprender la conservación de la unidad y su subdivisión.

Desde esta perspectiva, comprender una fracción no significa únicamente identificar partes coloreadas o reconocer numeradores y denominadores, sino entender la relación que existe entre las partes y la unidad completa. Por ejemplo, un medio puede representar cantidades distintas si cambia el tamaño del entero utilizado como referencia. La literatura especializada en educación matemática señala que una de las principales dificultades en el aprendizaje de las fracciones ocurre cuando los estudiantes no logran conservar mentalmente la idea de unidad mientras realizan particiones o comparaciones. En muchos casos, los niños reconocen las partes divididas, pero pierden de vista el todo al que pertenecen.

Fandiño Pinilla (2014) explica que esta dificultad se vuelve más evidente cuando la unidad no aparece de forma explícita. En actividades tradicionales, generalmente se presenta el entero completo —como un pastel o una barra dividida—, lo que facilita que los alumnos identifiquen visualmente las partes. No obstante, cuando deben reconstruir mentalmente la unidad a partir de una fracción o comparar cantidades sin observar el entero completo, suelen surgir confusiones y errores.

Freudenthal (1983) señala que la comprensión de la unidad requiere reconocer que esta no es una propiedad fija de los objetos, sino una construcción matemática que puede modificarse según el contexto. Desde esta idea, las fracciones adquieren sentido cuando los estudiantes logran establecer relaciones entre la unidad y sus subdivisiones. En la enseñanza tradicional, la aparición de una cantidad mayor que el entero $\frac{5}{4}$, carece de sentido, pues el niño intenta extraer cinco partes de un objeto que solo ha sido subdividido en cuatro. Llinares Ciscar y Sánchez García (1997) puntualizan que este conflicto se debe a que la instrucción tradicional trata al denominador como una frontera física; si el estudiante no concibe la unidad como una cantidad de referencia replicable, interpretará el denominador como la cantidad absoluta de las partes existentes, obstaculizando la asimilación conceptual de magnitudes superiores al entero.

Como explican Zolkower y Bressan (2012), la EMR contrarresta este estancamiento, donde los contextos realistas de medición longitudinal obligan a descentrar la atención del área

fija. Al emplear una tira de papel o una regla de medir, el estudiante constata que la unidad fraccionaria puede rebasar el límite del primer "entero" mediante la suma sucesiva: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, traduciéndose visual y formalmente en un punto específico del espacio continuo que equivale a un entero más un cuarto $\left(1 + \frac{1}{4}\right)$.

Por ello, resulta importante que la enseñanza de las fracciones no se limite únicamente a representaciones estáticas o modelos pictóricos tradicionales. El uso de materiales como tiras de papel, rectas numéricas y actividades de medición favorece que los alumnos comprendan que una misma fracción puede representarse de distintas maneras dependiendo de la unidad de referencia utilizada. Estos procesos favorecen la transición en el alumno de la matematización horizontal a la vertical, en consecuencia, se requiere que el diseño de secuencias didácticas planteen a las fracciones impropias como el principal motor de verticalización.

Asimismo, esta comprensión permite avanzar hacia ideas más complejas, como las fracciones impropias y las equivalencias, ya que los estudiantes comienzan a reconocer que las fracciones son números que pueden representar cantidades mayores, menores o equivalentes a la unidad. En consecuencia, la comprensión de la unidad de referencia constituye un elemento fundamental para el desarrollo del pensamiento fraccionario, debido a que posibilita que los alumnos construyan relaciones más flexibles entre las partes, el entero y las magnitudes representadas.

La Educación Matemática Realista como Fundamento Teórico

La presente categoría constituye el fundamento teórico y didáctico de esta investigación, debido a que orienta el diseño, desarrollo y análisis de la propuesta de intervención enfocada en la enseñanza de la suma y resta de fracciones en tercer grado de primaria. La investigación se sustenta en la EMR, una perspectiva desarrollada principalmente por Freudenthal y sus colaboradores en los Países Bajos. Esta corriente propone que las matemáticas no deben enseñarse únicamente como un conjunto de reglas y procedimientos para memorizar, sino como una actividad humana que los estudiantes construyen a partir de situaciones significativas.

Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático ocurre cuando los alumnos tienen la oportunidad de explorar problemas, discutir estrategias, representar ideas y construir formas propias de razonamiento antes de llegar a procedimientos formales. Por ello, la EMR otorga gran importancia a los contextos, la interacción, la resolución de problemas y el uso de modelos que permitan a los estudiantes avanzar gradualmente hacia niveles más formales de comprensión matemática.

En el caso específico de las fracciones, esta perspectiva resulta especialmente relevante, ya que favorece que los alumnos comprendan las relaciones entre las partes y la unidad a partir de situaciones de reparto, medición y comparación, evitando que el aprendizaje se reduzca únicamente a la memorización de algoritmos descontextualizados.

Esta categoría se organiza en cuatro subcategorías. En primer lugar, se presentan *los orígenes y fundamentos de la EMR*. Posteriormente, se analizan sus principales *principios didácticos y su relación con la enseñanza de las fracciones*. En un tercer momento, se aborda la *fenomenología didáctica* como referente para la selección de contextos y situaciones significativas. Finalmente, se recupera *el papel del docente como mediador* del aprendizaje y facilitador de procesos de matematización dentro del aula.

Origen y Fundamentos de la Educación Matemática Realista

La EMR surge en los Países Bajos durante la segunda mitad del siglo XX, principalmente a partir de las aportaciones de Freudenthal y del trabajo desarrollado en el Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht (Zolkower y Bressan, 2012). Esta perspectiva aparece como una respuesta crítica a modelos de enseñanza centrados en la transmisión mecánica de contenidos matemáticos y en la introducción temprana de formalismos abstractos.

Freudenthal (1973), cuestionó la idea de enseñar las matemáticas como un conjunto de conocimientos terminados que los estudiantes debían memorizar y repetir, que privilegiaba la enseñanza desde sus estructuras lógicas puras y abstractas. Desde su perspectiva, las matemáticas debían entenderse como una actividad humana vinculada con la organización, interpretación y resolución de situaciones significativas.

De acuerdo con Freudenthal (1973), aprender matemáticas implica que los alumnos participen activamente en procesos de exploración, representación y reflexión sobre problemas que tengan sentido para ellos. Por ello, la EMR propone que el conocimiento matemático no se presente de manera acabada desde el inicio, sino que los estudiantes puedan construirlo gradualmente mediante experiencias de aprendizaje contextualizadas. En consecuencia, el aula no puede operar como un modelo tradicional centrado en la transmisión unidireccional del conocimiento; debe transformarse en un espacio social donde los alumnos reinventen las herramientas matemáticas a través del análisis de fenómenos dotados de sentido.

En este sentido, la EMR se distancia de modelos tradicionales de enseñanza donde el docente explica primero definiciones y algoritmos para después solicitar ejercicios de repetición. Por el contrario, esta perspectiva considera importante que los alumnos desarrollen estrategias propias, comparen procedimientos y construyan significados antes de formalizar conceptos matemáticos.

Uno de los planteamientos centrales de la EMR es considerar que una situación es “realista” no únicamente porque provenga de la vida cotidiana, sino porque puede ser imaginada, comprendida y representada por el estudiante. Zolkower y Bressan (2012) explican que el término “realista” proviene del verbo holandés *zich realiseren* relacionada con la idea de imaginar o hacer comprensible una situación; por lo tanto, una situación es auténticamente realista si el problema que plantea es significativo, concebible y real en la mente del estudiante, activando en él la necesidad de actuar matemáticamente para resolverlo.

Desde esta perspectiva, los contextos utilizados en el aula funcionan como apoyos para que los alumnos construyan relaciones matemáticas con sentido. En el aprendizaje de las fracciones, por ejemplo, situaciones de reparto, medición o comparación permiten que los estudiantes comprendan las fracciones más allá de procedimientos mecánicos o representaciones aisladas.

Asimismo, la EMR reconoce la importancia de que el aprendizaje matemático avance de manera progresiva. Por ello, las actividades deben favorecer que los estudiantes pasen de estrategias informales y representaciones concretas hacia formas más estructuradas de

razonamiento matemático. Este proceso gradual es lo que Freudenthal (1973) y Treffers (1987) conceptualizan como matematización.

En consecuencia, la EMR aporta referentes importantes para comprender cómo los estudiantes construyen el sentido de las fracciones y cómo la mediación docente puede favorecer procesos de aprendizaje más comprensivos, reflexivos y vinculados con situaciones significativas.

Principios de la Educación Matemática Realista

La EMR no se limita al uso de contextos cotidianos o materiales concretos. Se trata de una perspectiva didáctica sustentada en un conjunto de principios que orientan la manera en que se diseñan las situaciones de aprendizaje, se organizan las interacciones en el aula y se favorece la construcción del conocimiento matemático.

Treffers (1987) sistematizó los planteamientos desarrollados por Freudenthal y propuso una serie de principios que permiten comprender cómo aprenden matemáticas los estudiantes. Posteriormente, Bressan et al. (2000) recuperaron y difundieron estos principios en el contexto iberoamericano, identificando seis elementos fundamentales: *actividad, realidad, reinención, niveles, interacción e interconexión*.

Estos principios constituyen referentes importantes para el diseño de la presente intervención didáctica, ya que orientan la construcción de experiencias de aprendizaje en las que los estudiantes puedan explorar situaciones significativas, proponer estrategias de resolución, intercambiar ideas y avanzar gradualmente hacia formas más estructuradas de razonamiento matemático.

En el caso de la enseñanza de las fracciones, dichos principios permiten comprender cómo los alumnos construyen significados a partir de situaciones de reparto, medición y comparación, favoreciendo un aprendizaje que trascienda la memorización de procedimientos y promueva la comprensión de las relaciones matemáticas involucradas.

El Principio de Actividad

El principio de actividad parte de la idea de que los estudiantes aprenden matemáticas cuando participan activamente en la resolución de problemas y en la construcción de estrategias, y no únicamente cuando reciben información o reproducen procedimientos previamente explicados. Este postulado rompe con la tradición de la escuela mecanicista y formalista, en la cual la matemática es tratada como un sistema cerrado de verdades preexistentes que el alumno debe almacenar de forma pasiva.

Al respecto, Freudenthal (1983) plantea que las matemáticas deben entenderse como una actividad humana, es decir, como una forma de organizar, interpretar y dar sentido a diferentes situaciones. Desde esta perspectiva, aprender matemáticas implica actuar, explorar, representar, comparar y reflexionar sobre las propias producciones. En este mismo sentido, Bressan et al. (2000) señalan que el alumno no debe ser considerado un mero receptor de conceptos ya elaborados, sino un productor activo de conocimiento matemático que conceptualiza a través de su propia acción organizadora.

De manera similar, Alagia et al. (2005) destacan que el aprendizaje matemático cobra sentido cuando los estudiantes tienen la oportunidad de producir y discutir sus propias formas de resolver una situación. Por ello, la enseñanza no debe centrarse exclusivamente en la transmisión de definiciones o algoritmos, sino en la creación de condiciones que favorezcan la exploración y la reflexión matemática. De Lange (1987) asocia este principio directamente con la corriente intuicionista, advirtiendo que el conocimiento matemático real no se transmite verbalmente, sino que se constituye a través de la acción estructurante del sujeto sobre fenómenos concretos o imaginados.

En el contexto de la enseñanza de las fracciones, este principio implica que los alumnos se enfrenten a situaciones que les permitan construir significados a partir de sus conocimientos previos. Antes de presentar procedimientos formales, resulta importante que tengan la oportunidad de representar cantidades, proponer estrategias de reparto, utilizar materiales y discutir diferentes formas de solución.

Desde la perspectiva de la EMR, la comprensión matemática se fortalece cuando los estudiantes participan activamente en la resolución de problemas y tienen la posibilidad de

explicar, justificar y revisar sus procedimientos. En este sentido, el principio de actividad orienta el diseño de experiencias de aprendizaje en las que los alumnos construyen progresivamente herramientas matemáticas con significado y sentido para ellos. Como afirman Zolkower y Bressan (2012), la apropiación del conocimiento es genuina cuando es el resultado directo de la propia actividad mental y práctica del sujeto, quien, al buscar regularidades dentro de un fenómeno concreto, inicia el proceso de matematización horizontal.

El Principio de Realidad

El principio de realidad constituye uno de los elementos distintivos de la EMR. Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático inicia a partir de situaciones que resultan significativas para los estudiantes y que les permiten construir relaciones matemáticas con sentido.

Freudenthal (1983) sostiene que las matemáticas deben mantenerse conectadas con la realidad, entendida no solamente como el mundo cotidiano, sino como cualquier situación que el estudiante pueda comprender, imaginar o representar mentalmente. En este sentido, una situación realista es aquella que tiene significado para el alumno y que puede convertirse en un punto de partida para la actividad matemática.

Al respecto, Zolkower y Bressan (2012) explican que el término "realista" no debe interpretarse únicamente como sinónimo de "real" o "cotidiano". Las autoras señalan que la palabra proviene de la expresión holandesa *zich realiseren*, que puede traducirse como imaginar, darse cuenta o hacer comprensible una situación. Por ello, un problema puede considerarse realista aun cuando no pertenezca directamente a la vida diaria de los estudiantes, siempre que estos sean capaces de representarlo, comprenderlo y utilizarlo para desarrollar ideas matemáticas.

Desde esta perspectiva, los contextos cumplen una función didáctica fundamental. No se utilizan únicamente para motivar o ejemplificar contenidos, sino porque ofrecen oportunidades para que los alumnos exploren relaciones, construyan estrategias y desarrollen formas personales de resolución. De esta manera, los contextos actúan como puentes entre las experiencias de los estudiantes y los conceptos matemáticos que se pretende construir.

Bressan et al. (2000) señalan que las situaciones realistas permiten que los alumnos movilicen conocimientos previos y generen procedimientos propios antes de enfrentarse a representaciones más formales. En consecuencia, los problemas constituyen un recurso para favorecer la comprensión y no solamente un espacio para aplicar conocimientos previamente enseñados.

En el caso de las fracciones, este principio adquiere especial relevancia, ya que conceptos como reparto, medición, comparación de cantidades o reconstrucción de unidades pueden trabajarse mediante situaciones cercanas a las experiencias de los niños. Estos contextos facilitan que los estudiantes otorguen significado a las fracciones y construyan relaciones entre las representaciones gráficas, las cantidades y los símbolos matemáticos.

Por tanto, el principio de realidad orienta el diseño de experiencias de aprendizaje en las que los alumnos puedan comprender las matemáticas como herramientas para interpretar y organizar situaciones significativas. Desde la EMR, los contextos no son un complemento de la enseñanza, sino el punto de partida para el desarrollo progresivo del pensamiento matemático.

El Principio de Reinención

Este principio plantea que los estudiantes pueden construir progresivamente los conocimientos matemáticos cuando participan en actividades que les permiten explorar, representar y reflexionar sobre diferentes situaciones problemáticas. Desde esta perspectiva, aprender matemáticas no significa únicamente recibir información o memorizar procedimientos, sino desarrollar ideas propias que posteriormente puedan evolucionar hacia formas más estructuradas de razonamiento.

Freudenthal (1983) sostiene que el conocimiento matemático no debe presentarse a los alumnos como un producto terminado. Por el contrario, considera importante que los estudiantes tengan la oportunidad de reconstruir, en cierta medida, algunos de los procesos que dieron origen a los conceptos matemáticos. A esta idea la denominó reinención guiada, destacando que el aprendizaje ocurre cuando los alumnos participan activamente en la construcción de significados con el acompañamiento del docente.

Es importante señalar que la reinención no implica que los estudiantes descubran por sí solos todo el conocimiento matemático. Como explica Gravemeijer (1994), el papel del docente consiste en diseñar situaciones didácticas que orienten la exploración y favorezcan la aparición de estrategias cada vez más elaboradas. En este sentido, la guía pedagógica resulta fundamental para que los alumnos avancen desde procedimientos informales hacia formas más convencionales de representación y resolución.

Zolkower y Bressan (2012), retomando los planteamientos de Freudenthal, señalan que la función de la enseñanza no es transmitir directamente los productos terminados de la matemática, sino generar condiciones para que los estudiantes desarrollen herramientas intelectuales que les permitan organizar y comprender diferentes situaciones. Por ello, el aprendizaje matemático se concibe como un proceso de construcción progresiva de significados y no como la simple aplicación de reglas previamente enseñadas.

En la enseñanza de las fracciones, este principio puede observarse cuando los estudiantes construyen procedimientos propios antes de conocer los algoritmos convencionales. Por ejemplo, ante una situación que involucra la suma de $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{4}$, los alumnos pueden utilizar tiras de papel, diagramas o representaciones gráficas para explorar distintas formas de combinar ambas cantidades. A partir de estas experiencias, tienen la posibilidad de reconocer relaciones entre las fracciones y comprender la necesidad de expresar ambas cantidades mediante una misma unidad de referencia.

Desde la perspectiva de la EMR, estas estrategias iniciales constituyen un punto de partida valioso para el aprendizaje. La función del docente consiste en recuperar, discutir y organizar dichas producciones para favorecer que los estudiantes avancen gradualmente hacia formas más convencionales de razonamiento matemático. De esta manera, los procedimientos formales adquieren sentido porque surgen como una respuesta a necesidades que los propios alumnos han identificado durante la resolución de problemas.

El Principio de Niveles

El tránsito desde las estrategias informales y contextualizadas hacia el pensamiento formal abstracto se rige de manera estricta por el principio de niveles. Este principio describe cómo el

conocimiento matemático progresa a través de estadios de abstracción cualitativamente diferenciados (Bressan et al., 2000). En la propuesta de la EMR, inspirada en las conceptualizaciones jerárquicas de Treffers (1987) y Gravemeijer (1994), se distinguen cuatro niveles esenciales de matematización por los cuales transita formalmente el pensamiento del alumno, desde la matematización horizontal hasta la vertical:

Nivel Situacional: El alumno resuelve el problema utilizando el sentido común y procedimientos informales estrechamente ligados al contexto de la realidad concreta (realizar dibujos detallados de los enteros, colorear y contar partes de forma intuitiva). El lenguaje utilizado es puramente coloquial.

Nivel Referencial: Emergen los llamados "modelos de" la situación. El alumno utiliza esquemas, diagramas, rectas numéricas o descripciones gráficas simplificadas que estructuran el problema real, pero cuyas operaciones aún hacen referencia directa al contexto original (usar una barra fraccionaria para representar visualmente la suma de los pedazos de un pastel).

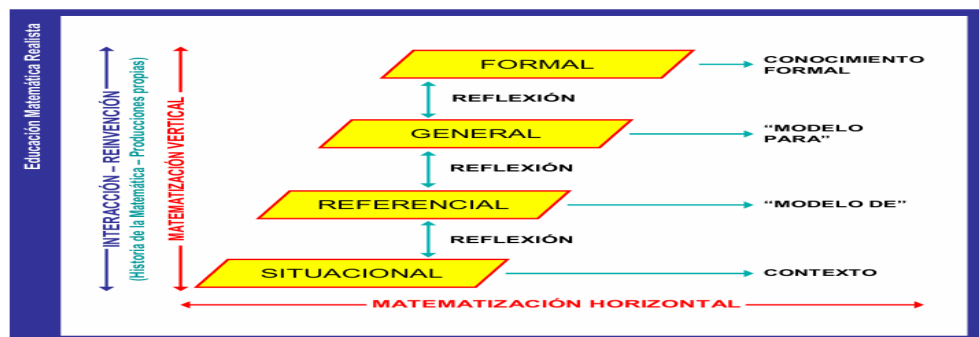
Nivel General: El modelo experimenta un cambio cognitivo fundamental. Deja de ser un reflejo del contexto particular y se independiza de él, transformándose en un "modelo para" resolver otros problemas de índole matemática. El alumno ya no piensa en galletas o cintas, sino en relaciones numéricas, aplicando regularidades, atajos heurísticos y combinaciones de estrategias generales.

Nivel Formal: El estudiante opera directamente con conceptos, símbolos, algoritmos tradicionales, reglas sintácticas y axiomas estandarizados de la matemática (operar simbólicamente con fracciones heterogéneas mediante la igualación de denominadores). El lenguaje se vuelve totalmente abstracto y formal.

Para hacer inteligible la dinámica interna de este tránsito cognitivo en el aula de tercer grado, es indispensable examinar la estructura sistémica del proceso. Al respecto, Zolkower y Bressan (2012) proponen una modelización gráfica (véase la Figura 1) que unifica los niveles de abstracción con las dimensiones operativas de la EMR:

Figura 1.

Niveles de matematización



Nota: tomada de Zolkower y Bressan, 2012, p. 180.

Como se puede observar en la Figura 1 la base del desarrollo del pensamiento del estudiante se encuentra anclada en la reflexión situacional orientada por el contexto. A partir de allí, la matematización horizontal actúa como una fuerza ascendente que tracciona las producciones informales del alumno hacia un nivel referencial. Una vez en este estadio, la matematización vertical asume el relevo instruccional, articulando la reflexión general mediante el uso de modelos heurísticos que avanzan progresivamente hasta alcanzar el plano del conocimiento formal.

El Principio de Interacción

El quinto pilar es el principio de interacción, el cual establece de manera contundente que el aprendizaje de las matemáticas no es un proceso de iluminación individual ni un acto de introspección solitaria, sino una actividad eminentemente social (Bressan et al., 2000). La EMR concibe al aula como una auténtica comunidad de aprendizaje y un foro de debate científico escolar. En este espacio, la comunicación interactiva, la puesta en común, la confrontación de estrategias espontáneas, la negociación de significados y la obligación de justificar verbal o gráficamente los procedimientos seguidos actúan como los verdaderos motores del desarrollo cognitivo.

Como argumentan Zolkower y Bressan (2012), la interacción social guiada por la intervención docente provoca el conflicto sociocognitivo indispensable para obligar a los alumnos a reflexionar sobre sus propios métodos. En el aprendizaje del campo aditivo fraccionario, este principio cobra una relevancia metodológica mayúscula para derribar el sesgo del número natural. Al socializar las diversas respuestas ante un problema y confrontar

verbalmente por qué la aplicación del algoritmo del entero (sumar linealmente numeradores y denominadores: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$ contradice la lógica de la medida obtenida en la tira de papel, la interacción grupal y la guía del docente fuerzan a los estudiantes a evaluar la validez de sus hipótesis. Es a través de la co-evaluación y la discusión reflexiva con los pares que los alumnos se ven motivados a abandonar sus estrategias más rudimentarias, buscando abreviar y sistematizar sus representaciones, lo cual acelera el salto hacia los niveles superiores de matematización.

El Principio de Interconexión

Finalmente, el proceso de formalización progresiva se consolida bajo la prevalencia del principio de interconexión o estructuración. Este postulado exige que los contenidos matemáticos no sean desglosados en el currículo como estructuras aisladas, fragmentadas o compartimentos sin comunicación entre sí. Al contrario, la EMR sostiene que la matemática escolar debe abordarse como una totalidad integrada donde los diferentes hilos conductores o ejes temáticos se entrelazan de manera sistémica a través de problemas ricos y complejos (Bressan et al., 2000). Al respecto, De Lange (1987) defiende que un currículo de corte realista requiere obligatoriamente el entrelazamiento de líneas de aprendizaje, dado que las aplicaciones matemáticas del mundo real exigen herramientas polifacéticas simultáneas.

En consecuencia, para que la suma y resta de fracciones en el tercer grado de primaria posea una estructura cognitiva sólida y duradera, las secuencias didácticas no deben diseñarse como un capítulo exclusivo e independiente de la aritmética abstracta. Por el contrario, el diseño instruccional debe conectar de forma explícita el concepto de fracción y sus operaciones con nociones geométricas de conservación de áreas, con los sistemas de medición de magnitudes continuas, con las razones de proporcionalidad simple, con la estimación y con el sentido numérico del sistema decimal. Al estructurar las actividades de esta manera interconectada, se le ofrece al estudiante la oportunidad de reconocer que un mismo modelo (la recta numérica o los diagramas de barra) posee una potencial importante para organizar fenómenos aparentemente disímiles, permitiéndole construir una disposición matemática flexible y holística.

El Papel del Docente en la Educación Matemática Realista: Mediación y Andamiaje

La operacionalización de los principios de la EMR en el aula de tercer grado de primaria no depende de la sustitución automática de los materiales didácticos, sino de un cambio en la identidad y funciones del agente mediador. Esta metodología exige un docente que actúe como un diseñador de entornos de aprendizaje, un coinvestigador de los procesos lógicos infantiles y un orquestador del discurso colectivo. Al concebirse la matemática como una "actividad humana" y no como un producto terminado, la función de la mediación no es evitar el error o allanar el camino mediante explicaciones prematuras, sino andamiar la matematización progresiva de los estudiantes sin expropiarles el esfuerzo cognitivo de la producción.

Para caracterizar el perfil del profesor realista, es imperativo analizar cómo se gestiona la interacción dentro de la comunidad de aprendizaje. El docente no abandona al alumno a una exploración empírica solitaria (descubrimiento puro), sino que interviene de manera estratégica. Zolkower y Bressan (2012) examinan esta compleja dinámica de aula y determinan que la función del educador realista se distancia por completo de la pasividad, transformándose en un guía intencionado que dinamiza el pensamiento socializado, esto es:

El papel del docente en el aula realista dista mucho de ser pasivo. Lejos de dictar definiciones y algoritmos o de limitarse a convalidar las respuestas de los alumnos, el docente actúa como guía, facilitador y organizador de los procesos de matematización horizontal y vertical (Zolkower y Bressan, 2012, p. 182).

En lugar de validar de manera inmediata si un procedimiento es correcto o incorrecto, el docente devuelve la responsabilidad matemática al grupo, forzando a los alumnos a argumentar, contrastar y defender la viabilidad de sus modelos. Al respecto, Alagia et al. (2005) profundizan en esta devolución de la responsabilidad intelectual y advierten que el docente debe resistir la tentación de sancionar la verdad aritmética de forma vertical. Cuando el maestro asume el rol de juez legitimador, habitúa al niño a buscar la aprobación externa en lugar de construir criterios de control semántico y racionalidad interna sobre sus propias producciones operacionales; por ende, la validación debe descentrarse del pizarrón y distribuirse en la interacción social del grupo.

Esta mediación activa se despliega durante la conducción de clase o puesta en común, espacio que la EMR conceptualiza como el motor de la matematización vertical. Tras enfrentar a los alumnos a un problema rico (medición longitudinal con tiras de papel), el docente debe

recoger las producciones e iconografías espontáneas de los equipos —desde las más rudimentarias e informales hasta las más simbólicas— y secuenciarlas estratégicamente para su discusión pública.

Como mencionan Treffers (1985) y Goffree (1985) (citados en de Lange, 1987) al analizar las funciones estructurales del contexto formuladas por las interacciones en el aula sirven para la formación de modelos y el soporte del pensamiento colectivo. El docente realista orquesta este diálogo mediante el uso de preguntas reflexivas que tensionan las contradicciones de los niños, tales como el sesgo del número entero. Al propiciar que los estudiantes confronten verbalmente por qué sumaron de forma directa numeradores y denominadores, el profesor no sanciona el error, sino que lo convierte en un síntoma explícito de una teoría local que debe ser refinada de manera comunitaria.

Asimismo, el educador debe ser capaz de identificar el momento preciso en que el grupo está listo para abandonar el soporte puramente situacional y transitar hacia la abstracción. Si el maestro prolonga innecesariamente el uso de contextos concretos o dibujos figurativos, petrifica el pensamiento en la matematización horizontal; si, por el contrario, introduce de forma abrupta la sintaxis algorítmica y abstracta, provoca una ruptura que desemboca en la inversión antdidáctica.

Lázaro Guillermo et al. (2024) reafirman que la mediación efectiva es aquella que guía la autogeneración de herramientas mediante la estructuración de la realidad. El docente realista interviene diseñando una secuencia didáctica flexible, anticipando las estrategias de los niños y utilizando andamios gráficos dinámicos que sirvan como puentes semióticos para que el alumno evolucione de forma autónoma desde un modelo de la situación hacia un modelo para el cálculo formal, conquistando un aprendizaje con pleno sentido numérico y rigor relacional.

Matematización Horizontal y Vertical

El núcleo explicativo y el motor que direcciona las transformaciones cognitivas en esta investigación reside, fundamentalmente, en desplazar la atención desde el saber matemático estático hacia la acción constructiva y organizadora del sujeto. Dentro de este andamiaje epistémico, la presente se erige como el vértice analítico medular del marco teórico. Su propósito central es conceptualizar el proceso progresivo mediante el cual los estudiantes de tercer grado

de educación primaria reestructuran, modelan y dotan de regularidades matemáticas a situaciones provenientes de la realidad o de contextos imaginables, permitiéndoles transitar hacia el campo de los números fraccionarios.

Este apartado se articula a través de cuatro subcategorías que analizan las dimensiones del pensamiento matemático en el aula. En primer término, la *conceptualización de la matematización* fundamenta la actividad estructurante como un proceso vivo y no lineal, posteriormente, la subcategoría de la *matematización horizontal* examina el paso crítico donde el alumno desestructura la narrativa del mundo empírico para modelar relaciones de reparto y medición, apoyándose en las funciones de formación de conceptos y modelos.

En tercer lugar, la *matematización vertical* permite avanzar hacia el mundo de los símbolos, caracterizados por el refinamiento, la combinación de esquemas y la formulación de atajos heurísticos. Finalmente, la subcategoría *del tránsito entre niveles de matematización* teoriza sobre el movimiento ascendente que experimenta el pensamiento del niño al evolucionar desde las estrategias informales del nivel situacional y referencial hacia los niveles general y formal, bajo la transformación de un modelo de la situación hacia un modelo para el razonamiento abstracto.

Conceptualización de la Matematización

El principio central de la EMR plantea que el aprendizaje de las matemáticas no debe reducirse a la memorización de contenidos o a la aplicación mecánica de procedimientos. Por el contrario, se concibe como un proceso mediante el cual las y los estudiantes construyen significados matemáticos a partir de situaciones que les resultan comprensibles y cercanas a su realidad. Desde esta perspectiva, el aprendizaje implica una transformación progresiva de las formas de pensar y resolver problemas, favoreciendo que el alumnado desarrolle estrategias cada vez más elaboradas para interpretar y organizar el mundo que le rodea.

En este marco surge el concepto de matematización, considerado uno de los pilares teóricos de la propuesta desarrollada por Freudenthal (1973) y operacionalizada posteriormente por Treffers (1987), Streefland (1991) y otros. Para Freudenthal (1983), las matemáticas constituyen una actividad humana que se construye a partir de la experiencia, por lo que aprender matemáticas implica organizar, interpretar y dar sentido a situaciones provenientes de la realidad

o de contextos que puedan ser imaginados por los estudiantes. De esta manera, el conocimiento matemático no se presenta como un conjunto de reglas acabadas, sino como una herramienta que permite comprender y actuar sobre diferentes situaciones.

Según Freudenthal (1973), matematizar significa transformar fenómenos o situaciones en objetos de pensamiento matemático. Este proceso implica que las y los estudiantes exploren, representen, describen y estructuren una situación hasta identificar en ella relaciones, regularidades o patrones susceptibles de ser expresados matemáticamente. En consecuencia, la matematización constituye un proceso activo de construcción de significado que conecta la experiencia cotidiana con formas más formales de razonamiento matemático.

Desde la perspectiva de Treffers (1987), la matematización puede entenderse como una actividad mediante la cual las personas organizan y estructuran problemas o situaciones con el propósito de reconocer relaciones, conexiones y regularidades. Este autor distingue dos dimensiones complementarias del proceso: la matematización horizontal y la matematización vertical, las cuales permiten explicar cómo el alumnado transita desde contextos cercanos y significativos hacia formas más abstractas y convencionales del conocimiento matemático.

En términos generales, la matematización no debe concebirse como una habilidad innata ni como una capacidad exclusiva de quienes poseen un alto desempeño matemático. Por el contrario, constituye un proceso que puede desarrollarse mediante experiencias de aprendizaje adecuadamente diseñadas. Cuando las y los estudiantes enfrentan situaciones problemáticas significativas, movilizan conocimientos previos, intuiciones, estrategias informales y formas personales de razonamiento que les permiten construir progresivamente nuevas comprensiones matemáticas (De Lange, 1987).

En el contexto de la presente investigación, la matematización adquiere especial relevancia porque permite comprender cómo los estudiantes de tercer grado construyen el significado de las fracciones y de sus operaciones. A través de este proceso, las y los alumnos pueden transitar desde estrategias basadas en experiencias cotidianas y representaciones concretas hacia formas más estructuradas de razonamiento matemático, favoreciendo así la

comprensión de la suma y la resta de fracciones como objetos matemáticos con sentido y significado.

Como advierten Zolkower y Bressan (2012), la matematización progresiva exige un andamiaje didáctico que respete los tiempos de producción del alumnado. El diseño de la intervención didáctica debe propiciar que las operaciones de suma y resta fluyan en una trayectoria continua de abstracción: iniciando en el nivel situacional mediante el lenguaje natural, ascendiendo por el nivel referencial a través de la mediación de modelos lineales, y consolidando el nivel formal donde los símbolos operan con pleno significado relacional.

Así, la matematización deja de ser un concepto abstracto de la literatura y se transforma en la herramienta metodológica que legitima la autonomía del estudiante. En este sentido, para comprender la dinámica interna de este tránsito, es imperativo diferenciar entre dos tipos de matematización, la horizontal y vertical, cuyas especificidades operacionales en el cálculo de fracciones se plantean en las siguientes líneas.

Matematización Horizontal

Dentro del enfoque de la EMR, la transición desde la realidad hacia el lenguaje abstracto no ocurre de forma abrupta ni mágica; se inaugura a través de la matematización horizontal. Este constructo, acuñado originalmente por Treffers en 1987, define el proceso mediante el cual el estudiante toma un problema arraigado en un contexto de la realidad (o imaginable para él) y utiliza sus recursos informales, lingüísticos y esquemáticos para traducirlo, organizarlo y dotarlo de una primera estructura matemática (De Lange, 1987; Lázaro Guillermo et al., 2024). En el dominio de los números racionales, la matematización horizontal representa el paso crítico donde el alumno desestructura la narrativa del mundo empírico para modelar las relaciones de reparto o medición, operando como el único antídoto legítimo contra la memorización vacía de algoritmos.

De Lange delimita la dimensión horizontal no como una simple resolución de problemas aplicados, sino como un acto de transmutación representacional:

En la matematización horizontal, el estudiante utiliza herramientas matemáticas para organizar y estructurar un problema situado en la realidad. Es la transición del mundo real al mundo de los símbolos. Actividades como identificar la matemática específica en un

contexto, esquematizar y descubrir relaciones pertenecen a esta dimensión (De Lange, 1987, p. 53).

A partir de esta conceptualización de De Lange, en este proceso investigativo se asume que la matematización horizontal se manifiesta cuando el niño se distancia del ropaje anecdótico del problema ("repartir tres barras de chocolate entre cuatro niños de forma equitativa") y logra identificar la estructura matemática subyacente (la necesidad de fraccionar la unidad para garantizar la equidad). Las acciones de dibujar las particiones, inventar iconografías informales, ensayar aproximaciones mediante el lenguaje natural (como "a cada quien le toca una mitad y un cuarto") y estimar visualmente las magnitudes son expresiones puras de la matematización horizontal. El alumno no ha invocado aún la sintaxis algorítmica formal de la disciplina; está construyendo el andamiaje semiótico primario que sostendrá el significado del objeto numérico.

Esta dimensión de estructuración inicial se articula estrechamente con las cuatro funciones fundamentales que los problemas contextuales cumplen en la instrucción realista, sistematizadas originalmente por Treffers (1985) y Goffree (1985) y recuperadas por De Lange (1987):

- a) *Formación de Conceptos*: en la primera fase del trayecto didáctico, los problemas basados en la realidad permiten a los estudiantes un acceso natural, intuitivo y motivado a las estructuras fraccionarias, emergiendo el concepto como una necesidad de organización del entorno.
 - b) *Formación de Modelos*: los contextos proveen un soporte firme y un anclaje semántico indispensable para el aprendizaje posterior de las operaciones formales, notaciones y reglas, actuando en estrecha interconexión con otros esquemas gráficos que funcionan como soportes del pensamiento humano.
 - c) *Aplicabilidad*: Los problemas contextuales descubren y validan la realidad no solo como el punto de partida de la trayectoria cognitiva, sino también como el dominio último de aplicación del conocimiento construido.
 - d) *Ejercicio de habilidades*: Permiten el desarrollo y la ejercitación de capacidades e intuiciones específicas de manera directa en situaciones aplicadas del entorno real.
- (p. 76).

La matematización horizontal se ancla de manera directa en las dos primeras. Al proveer un "fenómeno rico" (Freudenthal, 1983) —como una situación de medición longitudinal donde las reglas del conteo directo de enteros resultan insuficientes—, el contexto no funciona como un mero distractor motivacional. Por el contrario, provee al estudiante un acceso natural y motivado al saber matemático, sirviendo de base física para que emerja un modelo de la situación concreta. Al dibujar el camino recorrido o fraccionar una tira de papel, el alumno ejecuta una actividad organizadora horizontal que le permite controlar perceptivamente la validez de sus acciones, bloqueando anomalías cognitivas como el sesgo del número entero.

Bajo esta perspectiva, es imperativo examinar cómo los componentes del procesamiento horizontal descritos analíticamente por Treffers (1987) y De Lange (1987) configuran la base cognitiva del sentido numérico. La acción de identificar la matemática específica en un contexto se despliega cuando el niño comprende que la resolución de un problema de reparto no se agota en la descripción cualitativa de los objetos, sino en la necesidad de establecer una relación cuantitativa de equidad a través de la división de la unidad. Acto seguido, el proceso de esquematizar impulsa al alumno a plasmar dicha necesidad mediante representaciones icónicas y lineales rudimentarias. Esta esquematización horizontal inicial —como el dibujo libre de vasos, barras o líneas partidas— es lo que permite visualizar el problema de diversas maneras, ofreciendo al pensamiento infantil múltiples soportes semióticos para ensayar soluciones sin la presión del formalismo numérico.

A través de esta manipulación representacional, los alumnos comienzan a descubrir relaciones y regularidades, tales como advertir intuitivamente que, a mayor número de participantes en un reparto, menor será la magnitud de la porción correspondiente a cada uno. El cierre conceptual de este bucle horizontal se consolida cuando el estudiante demuestra la capacidad de reconocer regularidades en problemas similares, transfiriendo la estrategia de partición geométrica o lineal desarrollada en un contexto de alimentos a una situación puramente métrica o longitudinal. De este modo, la matematización horizontal no se reduce a una acción empírica pasiva, sino que constituye una actividad de estructuración activa donde los esquemas informales se estabilizan y preparan el terreno para la posterior abstracción sintáctica.

Como puntualizan Zolkower y Bressan (2012), la matematización horizontal es una condición indispensable pero no suficiente para la conquista del pensamiento matemático formal.

Si la mediación docente estanca la actividad del aula exclusivamente en este nivel, limitándose a que los niños manipulen objetos o realicen representaciones pictóricas figurativas de manera indefinida, lo que favorece en el alumno dependencia, obstaculizando su progresión cognitiva. El valor de la matematización horizontal radica en que prepara el terreno para el tránsito a la vertical. Al organizar horizontalmente la realidad, el estudiante estabiliza un repertorio de estrategias informales y herramientas gráficas que, mediante la interacción social y la orquestación del debate colectivo, comenzarán a despojarse de sus referentes empíricos. De este modo, la investigación-acción en tercer grado encuentra en la matematización horizontal su punto de partida metodológico: el espacio de libertad cognitiva donde el alumno utiliza su intuición para fundar las bases del sentido numérico fraccionario.

Matematización Vertical

Si la matematización horizontal dota al estudiante de tercer grado de educación primaria de un anclaje semiótico inicial al organizar la realidad, la matematización vertical constituye el eje de sofisticación cognitiva que eleva dichas experiencias informales hacia los sistemas abstractos, sintácticos y algorítmicos del saber matemático. En el marco de la EMR, el aprendizaje de las operaciones con fracciones no puede estancarse en la manipulación perpetua de contextos concretos o representaciones pictóricas. La matematización vertical define, precisamente, la actividad de procesamiento, refinamiento y generalización abstracta que ocurre dentro del mundo de los símbolos matemáticos (De Lange, 1987; Zolkower y Bressan, 2012).

Al respecto, De Lange (1987) delimita las fronteras de la actividad matemática vertical como un proceso de optimización del sistema representacional interno, en donde refiere:

Se puede afirmar que la matematización vertical es el proceso de operar dentro del propio sistema matemático. [...] Actividades como elegir un modelo, utilizar diferentes modelos, refinar y ajustar modelos, combinar e integrar modelos, formular un enfoque, generalizar y formalizar, forman parte de la dimensión vertical (De Lange, 1987, pp. 53-54).

Bajo esta perspectiva teórica de De Lange (1987), la matematización vertical en el tercer grado de primaria no equivale a la ejecución mecánica de pasos mnemotécnicos tradicionales. Se manifiesta, en cambio, cuando el niño empieza a establecer relaciones puramente numéricas entre las fracciones: automatiza combinaciones elementales (como reconocer que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ es

equivalentemente $\frac{1}{2}$ sin necesidad de recurrir al dibujo de una barra), formula estrategias de compensación, conecta expresiones fraccionarias con la unidad de referencia e integra modelos progresivamente más abstractos para resolver sumas y restas complejas.

La comprensión del tránsito vertical se apoya metodológicamente en el constructo de los niveles de matematización progresiva, analizados detalladamente por Zolkower y Bressan (2012). Mientras el nivel situacional y las primeras fases del nivel referencial pertenecen al dominio horizontal, la matematización vertical se activa plenamente en el tránsito hacia los niveles general y formal. En este proceso, el andamiaje clave es la evolución del uso didáctico de los modelos. Al inicio de la intervención, el alumno diseña un modelo de un contexto lineal específico (trazar una pista de carreras para calcular distancias parciales). La matematización vertical se despliega cuando este esquema se despoja de sus atributos descriptivos y físicos, accediendo a un modelo para el razonamiento abstracto (Gravemeijer, 1999).

Los componentes de procesamiento interno descritos por De Lange (1987, p. 44) se configuran como una amalgama de acciones conceptuales integradas que dinamizan la transición hacia la abstracción aritmética. Este tránsito se inaugura cuando el pensamiento infantil ejecuta la combinación y el ordenamiento de modelos, coordinando de manera simultánea diferentes esquemas informales de representación. En la adquisición del pensamiento fraccionario en la infancia, esta acción adquiere relevancia cuando se vincula la partición visual de un modelo de área con la ubicación posicional sobre una recta numérica, logrando ordenar y yuxtaponer magnitudes heterogéneas sin depender del conteo individualizado de las partes. Al dinamizarse esta interconexión, el pensamiento se ve impelido a esquematizar, un proceso donde se depura paulatinamente la carga gráfica figurativa que caracteriza las producciones iniciales. De este modo, las representaciones descriptivas y anecdóticas de objetos físicos transitan a esquemas geométricos, tales como rectángulos de fracciones racionales o segmentos rectilíneos abstractos que sirven de soporte directo al cálculo numérico mental.

Esta depuración representacional abre camino a que el alumno formule un nuevo enfoque ante las demandas operativas del sistema conceptual, demostrando una notable flexibilidad cognitiva. Un claro ejemplo de esta transformación ocurre al enfrentarse a una resta compleja como $1 - \frac{1}{4}$ y en lugar de modelar el desprendimiento físico de una parte del objeto,

reconfigurar el problema de manera relacional al concebir el entero bajo la equivalencia numérica de $\frac{4}{4}$, se simplifica la operación sintáctica mediante las propiedades internas del sistema matemático.

Finalmente, el *bucle de verticalización* alcanza su madurez cuando se logra generalizar y refinar las regularidades operativas descubiertas. A través del análisis y la confrontación de ideas, el estudiante de educación primaria estabiliza principios abstractos, tales como comprender con sentido que al duplicar un denominador se producen piezas que representan exactamente la mitad del tamaño de la unidad original. Al refinar su notación simbólica y despojarse por completo de la dependencia del soporte perceptivo, el alumno accede al nivel formal no mediante la memorización de un lenguaje aritmético, sino como el resultado lógico de haber construido atajos algorítmicos autogenerados, transformando la suma y la resta de fracciones en un producto genuino de su propia actividad estructurante.

En este sentido, la matematización vertical como mecanismo capaz de suprimir de raíz el sesgo del número entero, se pone de manifiesto cuando un alumno de primaria se enfrenta de manera prematura al formalismo simbólico $\frac{a}{b}$ ó $\frac{c}{d}$, sin haber transitado por una trayectoria de verticalización progresiva, intenta asimilar las fracciones utilizando las reglas de los números naturales, lo que desencadena el error universal de sumar numeradores con numeradores y denominadores con denominadores. La EMR demuestra que la única vía para acceder al nivel formal con pleno sentido numérico es a través de un andamiaje didáctico que respete la autogeneración de estrategias del alumno.

Como puntualizan Zolkower y Bressan (2012), formalizar no es memorizar un lenguaje ajeno ni adoptar pasivamente una sintaxis prefabricada, sino el resultado final de un proceso de organización e independización progresiva de los modelos que se refina comunitariamente bajo la guía docente. De este modo, la matematización vertical transforma el algoritmo de la suma y la resta de fracciones de un decreto ciego del currículo a un producto lógico y maduro de la propia actividad estructurante del estudiante.

El Tránsito entre Niveles de Matematización

El andamiaje de una propuesta didáctica orientada a la enseñanza con sentido de la suma y resta de fracciones en tercer grado de primaria no se agota en la delimitación de las dimensiones

horizontal y vertical de la actividad matemática. El verdadero desafío epistemológico y metodológico para el docente radica en comprender, anticipar y gestionar el tránsito progresivo entre los niveles de matematización. Dentro del paradigma de la EMR, el progreso del pensamiento infantil no se concibe como una escalera de estadios rígidamente separados ni como un salto abrupto desde la manipulación física hacia la abstracción pura. Por el contrario, se teoriza como un continuo dinámico en el cual el estudiante reorganiza sus representaciones mediante niveles de comprensión interconectados: *situacional*, *referencial*, *general* y *formal* (De Lange, 1987; Zolkower y Bressan, 2012). Operacionalizar este tránsito es indispensable para documentar cómo la mente del alumno de primaria desarticula de forma progresiva el sesgo del número entero y conquista la sintaxis formal de los números fraccionarios.

Para fundar la estructura de este movimiento ascendente, es necesario examinar cada nivel a la luz de los planteamientos teóricos aquí planteados. El punto de partida es el nivel situacional, donde la actividad matemática está indisolublemente ligada al contexto y los problemas se resuelven mediante estrategias informales y el lenguaje natural. El primer gran tránsito se produce hacia el nivel referencial, el cual emerge cuando la necesidad de organizar el problema obliga al alumno a generar esquematizaciones, descripciones e iconografías.

Como puntualizan Zolkower y Bressan (2012), este nivel constituye el nicho donde nacen y operan los modelos mediadores, actuando como el puente de comunicación entre la base física del problema y las relaciones numéricas internas de la disciplina. En este nivel referencial “aparecen los modelos (dibujos, diagramas, esquemas) que refieren a la situación planteada en el problema y que sirven de andamio para pensar en ella de manera matemática sin necesidad de tener los objetos presentes” (Zolkower y Bressan, 2012, p. 180).

En el marco de la suma de fracciones en tercer grado, este tránsito inicial se hace evidente cuando el alumno deja de requerir la manipulación directa de tiras de papel o repartos físicos y pasa a estabilizar un dibujo representativo de la partición métrica. El objeto real se ha transmutado en un portador de significado gráfico preliminar.

El punto más crítico ocurre en el tránsito del nivel referencial hacia el nivel general y, eventualmente, hacia el nivel formal. Esta transformación ha sido caracterizada por la escuela holandesa como el paso de *un modelo de* la situación a *un modelo para* el pensamiento matemático (Gravemeijer, 1999). Al inicio de la secuencia instruccional, el esquema gráfico

diseñado por el niño funciona estrictamente como un modelo de un contexto lineal específico (por ejemplo, el dibujo detallado de una pista de carreras segmentada en cuartos).

Sin embargo, bajo la mediación docente, el modelo experimenta un proceso de "purificación" cognitiva: se despoja gradualmente de sus atributos descriptivos y figurativos hasta que el estudiante lo independiza del contexto de origen. En ese instante, el andamio se convierte en *un modelo para* el cálculo abstracto (la recta numérica o la regla de fracciones generalizable). El estudiante ya no piensa en la pista de carreras ni en el chocolate; utiliza la línea de intervalos regulares de forma autónoma para ejecutar saltos iterativos de magnitudes racionales, ingresando de lleno al procesamiento numérico vertical.

De Lange (1987) refiere que la progresiva matematización, desde la conceptualización concreta hasta la abstracta, “se caracteriza por la integración de modelos y el surgimiento de niveles superiores de reflexión. Este proceso ondulatorio garantiza que la comprensión matemática esté firmemente arraigada en la propia actividad de estructuración del estudiante” (p. 59). En este sentido, obligar al pensamiento del alumno de tercer grado a transitar de manera continua por los niveles *situacional*, *referencial* y *general*, se garantiza que la formalización de la suma y resta de fracciones emerja no como una imposición arbitraria del plan de estudios, sino como el resultado maduro, reflexivo y plenamente comprendido de su propia actividad organizadora.

Ubicación del Objeto de Estudio

El análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la suma y resta de fracciones en el tercer grado de educación primaria no puede reducirse al examen aislado de técnicas metodológicas, ni al empleo de materiales manipulativos. Dado que los objetos matemáticos son entidades ideales, el sujeto que aprende, es decir, los alumnos, solo pueden interactuar con ellos, transformar sus propiedades y comunicar sus relaciones a través de un conjunto de signos, símbolos, gráficos y expresiones lingüísticas.

Dentro de la Didáctica de la Matemática, la enseñanza de las fracciones en educación primaria se sitúa teóricamente en los conceptos de cociente (a partir de situaciones de reparto equitativo) y de medida (mediante la exploración longitudinal de magnitudes continuas). Al ubicar la fracción como una magnitud continua medible, la suma y la resta dejan de ser vistas

como la manipulación de dos números enteros independientes (numerador y denominador) aislados por una barra horizontal.

En este sentido, el tema, objeto de este estudio se convierte en el seguimiento cualitativo del tránsito cognitivo del alumno: desde sus producciones informales y el lenguaje coloquial (matematización horizontal) hasta la estabilización de modelos heurísticos lineales y atajos algorítmicos con sentido relacional (matematización vertical). Por lo que, la comprensión del número fraccionario en el tercer grado de primaria no puede agotarse en el dominio procedimental de una sola forma de representación (el numérico-simbólico), por el contrario, se requiere construir un conjunto de significados donde sea capaz de reconocer e identificar la diversidad de representaciones de una misma magnitud

Cuando las secuencias didácticas tradicionales eliminan la matematización horizontal e imponen directamente la sintaxis formal en las primeras etapas del aprendizaje, el estudiante se ve forzado a procesar la tarea utilizando sus saberes relativos a los números naturales, consolidados hasta esta etapa, en su estructura cognitiva; ocasionando que el alumno interprete la fracción como dos números enteros independientes colocados de forma arbitraria en una disposición espacial vertical.

El docente-investigador, en su rol de mediador y orquestador del discurso colectivo, debe diseñar interacciones sociales y puestas en común donde los dibujos e iconografías informales del nivel situacional (modelos de la realidad) sean andamiados e institucionalizados deliberadamente hacia notaciones mixtas, diagramas de barras y esquemas visuales de intervalo continuo (modelos para el pensamiento matemático).

Al utilizar las tiras de papel o la recta numérica vacía como modelos mediadores, el estudiante de tercer grado adquiere una herramienta semiótica de validación interna. El contexto de la medida y la longitud le revela de forma inmediata que la suma directa de los componentes enteros es un absurdo, obligándolo a reinventar la necesidad de la equivalencia y la igualación de unidades métricas. De este modo, el acceso al formalismo abstracto y a los algoritmos convencionales se da no como un decreto impuesto por el docente, sino como el resultado lógico de una sólida evolución orientada por la comprensión del propio alumno.

En síntesis, la matematización horizontal y vertical constituyen categorías centrales para interpretar procesos de construcción del pensamiento fraccionario en los estudiantes. Desde esta perspectiva, la presente investigación recupera dichas categorías no solo como referentes conceptuales, sino como herramientas analíticas que permiten interpretar las estrategias, representaciones y formas de argumentación desplegadas por los alumnos durante la intervención didáctica.

Desde la perspectiva de la investigación-acción participativa, las categorías desarrolladas en este marco teórico no únicamente orientan la comprensión conceptual del fenómeno estudiado, sino que también permiten problematizar la práctica docente y analizar las transformaciones generadas durante la intervención. En este sentido, la EMR se constituye tanto en referente didáctico como en herramienta de reflexión sobre las decisiones pedagógicas implementadas en el aula.

Capítulo III. Referente Metodológico

El presente capítulo constituye el diseño metodológico sobre el cual se desarrolla la presente investigación. Su propósito es detallar las decisiones epistemológicas, los métodos de intervención áulica y los dispositivos de recogida de información que permiten dar respuesta a la problemática delineada en el capítulo I: las rupturas cognitivas que experimentan los estudiantes en el tránsito de los números naturales a los racionales, y el desafío didáctico que representa la construcción con sentido de las operaciones de suma y resta de fracciones.

La naturaleza de este objeto de estudio demandó una aproximación metodológica capaz de recuperar la complejidad de las interacciones que ocurren en el aula, así como de documentar los cambios que emergen durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, tales como el lenguaje coloquial, los repartos informales y los dibujos originales de los estudiantes (matematización horizontal), así como su evolución para dar paso a modelos mediadores lineales como la recta numérica y algoritmos con sentido numérico (matematización vertical).

En este capítulo se presentan las decisiones metodológicas que orientaron el desarrollo de la investigación. En primer lugar, se describe el enfoque y diseño de investigación; posteriormente, se caracteriza el método, las técnicas e instrumentos; se continúa con la descripción de los participantes; finalmente, se detallan los procedimientos utilizados para la producción y análisis de la información.

Enfoque de la Investigación

La presente investigación adopta un enfoque cualitativo. En el campo de la educación matemática, y específicamente en el estudio del sentido numérico, este enfoque permite comprender los fenómenos directamente en el lugar donde ocurren, priorizando el análisis profundo de los procesos sobre la medición estadística. Al estudiar cómo los alumnos de tercer grado de primaria comprenden y resuelven la suma y la resta de fracciones, se asume una postura interpretativa centrada en las experiencias y producciones de los propios estudiantes.

De acuerdo con Mason (1996, como se citó en Vasilachis, 2006), la investigación cualitativa se caracteriza por tres elementos sustantivos:

a) se funda en una posición filosófica que es ampliamente interpretativa en el sentido de que se interesa en las formas en las que el mundo social es interpretado, comprendido, experimentado y producido, b) se basa en métodos de generación de datos flexibles y sensibles al contexto social en el que se producen, y c) es sostenida por métodos de análisis y explicación que abarcan la comprensión de la complejidad, el detalle y el contexto. (p. 25).

Estos tres ejes guían el desarrollo de esta investigación. Primero, la postura interpretativa ayuda a analizar cómo los alumnos asimilan el paso de los números naturales a los racionales, identificando los quiebres en sus esquemas de pensamiento. Segundo, la flexibilidad de los métodos cualitativos permite ajustar la secuencia didáctica diseñada según las necesidades cognitivas que muestre el grupo en el aula. Tercero, el análisis no se limita a registrar si el resultado de una operación es correcto o incorrecto, sino que busca explicar la lógica de sus razonamientos. De este modo, el enfoque cualitativo responde a preguntas procesuales sobre el cómo y el porqué del cambio de representaciones matemáticas en los alumnos.

Por otra parte, Marshall y Rossman (1999, como se citó en Vasilachis, 2006) definen la investigación cualitativa como un proceso interactivo entre el investigador y los participantes. Este proceso requiere que el docente se involucre en la vida cotidiana del aula, descubra las perspectivas de los actores y asuma el comportamiento observable y las palabras de los alumnos como los datos primarios de la investigación. En este estudio, dicha inmersión implica valorar las descripciones informales y los dibujos originales de los estudiantes como el punto de partida para guiar el aprendizaje. Esto facilita el acceso a las interacciones socio-matemáticas y a los significados que los niños asignan a los problemas planteados.

Al centrarse en la práctica real, este enfoque permite observar cómo se desarrollan las interacciones rutinarias en el salón de clases, en este sentido, la gran fortaleza de la investigación cualitativa es su capacidad para usar datos naturales con el fin de ubicar las secuencias específicas donde los participantes construyen sus significados (Vasilachis, 2006). Por lo tanto, para analizar el tránsito hacia la matematización vertical, no se puede separar la forma en que los alumnos conceptualizan la fracción de la manera en que resuelven los problemas prácticos. El análisis de estas interacciones ayuda a comprender bajo qué condiciones la fracción empieza a entenderse como una magnitud única y dinámica.

Bajo la perspectiva de Flick (2004), se asumen cuatro rasgos esenciales que dan orden a este proceso:

- Adecuación de los métodos y las teorías: El propósito es descubrir el curso real del aprendizaje y construir explicaciones basadas en el material recogido en el aula, evaluando la validez del estudio en referencia directa al objeto de estudio.
- La perspectiva de los participantes y su diversidad: Se reconoce que los saberes previos de los alumnos no son homogéneos, sino que difieren debido a sus propios conocimientos y a sus formas intuitivas de entender la unidad.
- La reflexividad del investigador: La comunicación directa del docente con el grupo es parte del conocimiento que se genera. Las observaciones, las decisiones didácticas sobre la marcha y las notas del investigador en el campo se toman como datos válidos de análisis a través del diario de investigación.
- Variedad de enfoques y métodos: Se asume que el enfoque cualitativo no es un conjunto de reglas rígidas, sino una pluralidad de herramientas que enriquecen la interpretación del fenómeno educativo.

De este modo, el enfoque cualitativo no es solo una colección de técnicas, sino una forma de conceptualizar la realidad escolar. Su valor no está en transcribir textualmente lo que dicen los alumnos, sino en la capacidad de analizar e interpretar esas producciones para conectar los hallazgos con la teoría didáctica. El acto cualitativo consiste en traducir, descifrar y explicar cómo aprenden los estudiantes, recuperando las particularidades de la situación estudiada.

Finalmente, es necesario precisar que el carácter de este enfoque alude a que el investigador trabaja con procesos, acciones y acontecimientos reales y espontáneos que ya ocurren en la vida escolar de los alumnos de tercer grado. El objetivo es registrar estas interacciones tal como suceden en su complejidad original, sin manipular variables ni forzar controles experimentales que alteren el pensamiento matemático genuino de los estudiantes.

Método

El método bajo el cual se desarrolla esta investigación es la investigación-acción (IA), la cual se concibe, en el marco de la práctica educativa, como una herramienta de desarrollo profesional y una forma de indagación práctica realizada por el profesorado de forma colaborativa. Su

propósito fundamental no radica en la simple producción de conocimientos de carácter universal o en la creación de teorías abstractas alejadas de las aulas, sino en cuestionar las prácticas sociales y los valores que las integran con la finalidad de explicitarlos, comprenderlos y transformarlos.

Bajo esta perspectiva, el aula deja de ser un espacio de reproducción técnica y se transforma en un escenario de reflexión e investigación continua. De acuerdo con Elliott (2005), la investigación-acción es entendida como “un estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma” (p.87). Para este autor, el método consiste en una reflexión profunda sobre las acciones humanas y las situaciones sociales vividas por los docentes, cuyo objetivo inmediato es ampliar la comprensión de sus propios problemas prácticos para, posteriormente, modificar y mejorar la situación una vez alcanzada una interpretación más profunda.

Por su parte, Latorre (2005) define la investigación-acción como una indagación práctica que vincula de manera permanente y dinámica tres elementos esenciales para el profesorado: la investigación, la acción y la formación. Desde la óptica de ambos teóricos, la investigación acción asume que la teoría y la práctica no son entidades separadas; al contrario, la teoría educativa se desarrolla y se modifica a través de la misma práctica.

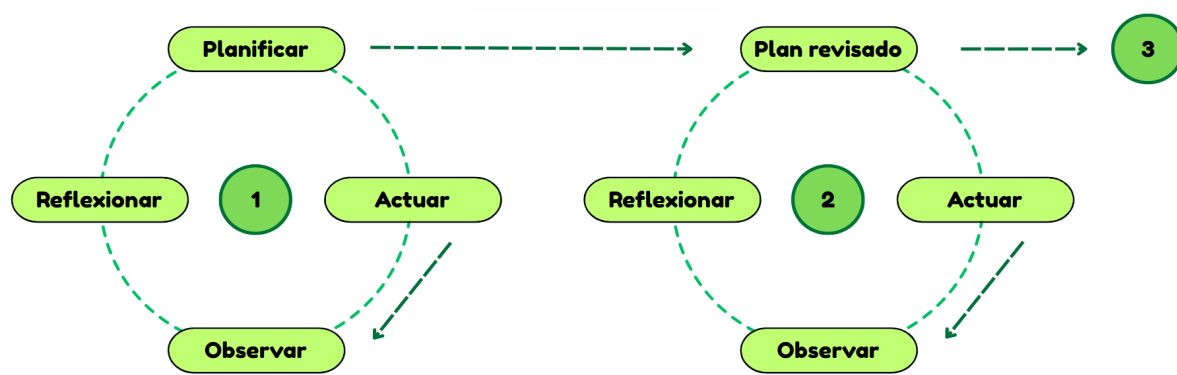
La investigación-acción se presenta como la vía idónea para revertir esta situación mediante una transformación de la práctica docente. Al asumir la investigación acción, el profesorado adopta una postura activa de indagación dentro de su propia aula. Esto permite transitar hacia la reflexión en la acción, donde el docente se convierte en un práctico reflexivo. De este modo, la investigación-acción busca transformar la conciencia del docente y modificar sus estrategias en el aula, se derriba la estructura pasiva de la escuela tradicional para dar paso a una docencia creadora, orientada a que los alumnos descubran, innoven y piensen por sí mismos.

Para guiar el proceso operativo de la investigación, este estudio adopta el modelo cíclico desarrollado por Kemmis y McTaggart (1992) el cual organiza el proceso a través de la acción, la reflexión, la planificación y la observación. Estos componentes interactúan dinámicamente en una estructura que Kemmis y McTaggart (1992) definen como una espiral autorreflexiva de conocimiento y acción. Cada ciclo está compuesto por cuatro fases o momentos interrelacionados como se describe en las siguientes líneas y en la figura 2:

- **Planificación:** Consiste en el desarrollo de un plan de acción críticamente informado y diseñado de manera flexible para mejorar la situación o problemática identificada en la práctica actual. Este plan parte de un diagnóstico reflexivo y de una revisión documental que delimitan el foco de estudio.
- **Acción:** Es la puesta en marcha del plan estratégico de manera deliberada, consciente y controlada. La acción se mantiene dinámica y abierta a reajustes según las contingencias del contexto.
- **Observación:** Consiste en la recogida y el análisis de datos de manera sistemática y rigurosa sobre los efectos, condiciones y consecuencias (tanto previstas como imprevistas) de la acción implementada. El propósito fundamental de esta fase es documentar el proceso para identificar las evidencias o pruebas que demuestren si la mejora esperada ha tenido lugar.
- **Reflexión:** Es el momento de la mirada retrospectiva apoyada en la discusión y el análisis de los datos registrados durante la observación. La reflexión permite reconstruir el significado de la situación vivida, evaluar las ventajas y desventajas de la intervención y, esencialmente, proveer la base conceptual y práctica para realizar una nueva planificación, iniciando así un ciclo sucesivo en la espiral.

Figura 2

Espiral de ciclos de investigación-acción



Nota: Adaptada de La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa (Latorre, 2005, p. 32).

La elección de la IA respondió a la necesidad de comprender una problemática surgida en la práctica docente relacionada con las dificultades que presentan los estudiantes para construir significados en torno a las operaciones con fracciones. Desde esta lógica, la investigadora asumió un papel activo en el diseño, implementación y análisis de las secuencias didácticas, participando directamente en los procesos de observación, documentación y reflexión sobre las experiencias de aprendizaje desarrolladas en el aula.

Técnicas e Instrumentos

La recogida de datos constituye un momento de vital importancia dentro de la fase de la observación del ciclo de investigación-acción, debido a que el docente-investigador precisa recoger información detallada sobre la intervención para evaluar qué consecuencias o efectos tiene su práctica educativa en el aula. De acuerdo con Latorre (2005), las técnicas de recogida de datos engloban los distintos instrumentos, estrategias y medios audiovisuales que los investigadores sociales utilizan para reducir de un modo sistemático e intencionado la realidad social que se pretende estudiar.

Con el fin de capturar de manera integral las diversas perspectivas y el punto de vista de la docente-investigadora, así como las acciones, actividades y producciones de los participantes, se adoptan técnicas organizadas bajo los criterios de implicación e interacción con la realidad que proponen Latorre (2005) y Elliott (2005): técnicas basadas en la observación, conversación, análisis de documentos y materiales, así como medios audiovisuales. De manera específica se describen las técnicas e instrumentos utilizados durante el proceso investigativo.

La Observación Participante

La observación participante es una estrategia metodológica inherente a la investigación-acción y a la enseñanza reflexiva, ya que implica la combinación de técnicas de obtención y análisis de datos a través de una implicación y participación directa del observador en los acontecimientos. Esta técnica exigió que la docente-investigadora se implicara en la vida social del aula y compartiera las actividades fundamentales con los alumnos para obtener una comprensión en profundidad. Al asumir el rol de docente-investigadora, esta técnica permite aproximarse de manera intensa a las interacciones socio-matemáticas y a las resistencias cognitivas de los estudiantes frente al concepto de fracción.

Videograbación y Grabaciones de Audio

Los medios audiovisuales son herramientas indispensables en la investigación-acción para registrar y recopilar imágenes auditivas y visuales en entornos naturales, permitiendo conservar con fidelidad la producción verbal y la complejidad de las acciones como un todo fijo. Dado que la interacción verbal y el debate son motores esenciales para el redescubrimiento guiado en la EMR, el registro audiovisual no solo documenta el habla, sino que devela cómo el lenguaje coloquial y las descripciones narrativas comienzan a estructurarse y formalizarse hacia la organización de modelos matemáticos más abstractos.

En este estudio, la videograbación se utilizó de forma focalizada para registrar las clases de matemáticas durante el trabajo en equipos pequeños y las puestas en común, permitiendo recuperar la información para su posterior microanálisis sin mediación o focalización previa. Por su parte, la grabación en audio se empleó como una técnica flexible que complementa la observación, permitiendo captar las explicaciones verbales espontáneas y los intercambios verbales más sutiles entre la docente y alumnos mientras se desplaza por el aula.

El análisis de estas técnicas de recopilación de información constituye un registro detallado que traduce la producción verbal de los alumnos y docente a un formato escrito legible. De acuerdo con las orientaciones de Elliott (2005), el procedimiento consiste en revisar la cinta en primera instancia, detenerse en aquellos acontecimientos significativos donde los alumnos confrontan problemas complejos (como las fracciones impropias o la resta) y proceder a transcribir dichos episodios de forma literal. Ello facilita analizar detenidamente los procesos de argumentación, los tipos de emisiones generadas y la evolución del lenguaje coloquial hacia la formalización matemática.

Análisis de Producciones de los Alumnos

El análisis documental y de materiales en la investigación-acción constituye una actividad sistemática y planificada que consiste en examinar los relatos escritos o artefactos materiales generados en el contexto del aula, funcionando como instrumentos de observación que facilitan información retrospectiva sobre los problemas sometidos a estudio. En esta investigación, el examen de los materiales empíricos es la vía principal para documentar y contrastar las evidencias de cambio en el pensamiento de los alumnos, específicamente al registrar el paso del

"modelo de" una situación de reparto informal hacia la construcción de un "modelo para" el razonamiento matemático abstracto.

Las hojas de trabajo de los alumnos proporcionan una base de datos útil, objetiva y cuantificable sobre el estado del aprendizaje de cada individuo. Estas hojas contienen los problemas diseñados bajo los principios de la EMR y actúan como el soporte físico donde el estudiante plasma de forma gráfica, simbólica o numérica sus estrategias originales de resolución. A través de su recolección y análisis sistemático, el investigador puede rastrear la secuencia y el orden del contenido, identificando si las producciones originales del alumno se mantienen ancladas en la descripción narrativa horizontal o si comienzan a evolucionar de manera autónoma hacia la verticalización del conocimiento matemático.

Fotografías e Imágenes

La fotografía es una técnica de registro visual cada vez más popular en la investigación-acción que permite captar y conservar de manera permanente los aspectos visuales fijos de una situación social en su entorno sociocultural. Su uso principal en este estudio es documentar la acción y servir como prueba material de comprobación y evaluación de que un evento o una movilización cognitiva tuvo lugar en el aula.

En el marco de la enseñanza de las fracciones, la fotografía es un auxiliar metodológico de primer orden para capturar el registro visual de modelos efímeros contruidos por los alumnos en el pizarrón o mediante el uso de material concreto. Debido a que las configuraciones de material concreto o los trazos en el pizarrón suelen borrarse o desarmarse al término de la sesión, la fotografía congela dicha realidad física, permitiendo a la docente-investigadora disponer de evidencias visuales sobre cómo los estudiantes organizan socialmente el espacio para resolver un problema.

Diseño Metodológico

La integración de la espiral de Kemmis y McTaggart (1992) con el proceso de esta investigación se estructura a través de una progresión sistemática donde la delimitación de cada fase responde directamente a las necesidades del objeto de estudio. No se trata de una secuencia de pasos rígidos, sino de una articulación dinámica donde el diagnóstico de los saberes previos abre paso a

la intervención didáctica intencional, la cual es monitoreada en tiempo real para, finalmente, evaluar el impacto del enfoque realista en el pensamiento matemático de los estudiantes.

Para visualizar la correspondencia entre las intenciones investigativas y la operatividad en el aula, en la Tabla 2, se presenta la organización que articula los objetivos con las fases de la investigación-acción propuestas por Latorre (2005).

Tabla 2

Matriz cualitativa del diseño metodológico.

Fases del proceso	Propósito de la fase	Acciones de la docente-investigadora	Técnicas e instrumentos
Planificación	Identificar los saberes previos y las concepciones iniciales de los estudiantes sobre el concepto de fracción y la unidad de referencia de fracciones.	Análisis curricular de la NEM; diseño de reactivos para un instrumento diagnóstico.	Examen diagnóstico escrito, cuestionario de fracciones.
Acción	Diseñar e implementar una intervención didáctica fundamentada en los principios de la EMR que promueva la resolución de problemas de suma y resta de fracciones en estudiantes de tercer grado de educación primaria.	Planificación de secuencias didácticas de suma y resta de fracciones; mediación de las sesiones de aprendizaje; planteamiento de problemas en contextos de medida; fomento de la discusión colectiva en el aula.	Observación participante, videgrabaciones, fotografías de evidencias, recopilación de producciones de los estudiantes.
Observación	Analizar las estrategias de resolución de problemas y las representaciones matemáticas que emplean los estudiantes durante la implementación de la intervención didáctica.	Recolección de las producciones gráficas de los alumnos.	Observación participante, bitácora docente, videos, registros descriptivos, análisis de evidencias de trabajo.

Reflexión	Valorar el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en los procesos de resolución de problemas de suma y resta de fracciones desarrollados por los estudiantes.	Análisis cualitativo de los esquemas infantiles; transcripción de episodios verbales críticos; triangulación teórica y evaluación de la progresión de niveles.	Transcripciones de videos, rúbricas de nivel de matematización e informe de resultados.
-----------	--	--	---

Así mismo, para garantizar la validez metodológica y la coherencia interna de la investigación, es fundamental que cada objetivo específico planteado en el Capítulo I encuentre una correlación en las herramientas epistemológicas, las actividades de intervención y las fuentes de evidencia empírica dentro del aula. A continuación, se presenta la Tabla 3, la cual establece la congruencia entre objetivos específicos y categorías de análisis de los resultados.

Tabla 3

Tabla de congruencia entre objetivos específicos y categorías de análisis

Objetivos específicos	Categorías de análisis	Subcategorías / Indicadores cualitativos
Identificar los saberes previos y las concepciones iniciales de los estudiantes sobre el concepto de fracción y la unidad de referencia de fracciones.	Dificultades, errores y obstáculos cognitivos en fracciones	Sesgo del número entero Dependencia de modelo parte-todo Dificultad en la identificación de la unidad de referencia
Diseñar e implementar una intervención didáctica fundamentada en los principios de la EMR que promueva la resolución de problemas de suma y resta de fracciones en los estudiantes del grupo.	Intervención docente bajo los principios de la EMR	Selección de contextos orientadores y realizables (reparto e iteración) Fenomenología didáctica de la resta como palanca. Estructuración de andamios didácticos y redescubrimiento guiado

Analizar las estrategias de resolución de problemas y las representaciones matemáticas que emplean los estudiantes durante la implementación de la intervención didáctica.	Tránsito de la Matemización con el uso de Modelos	Representaciones pictográficas informales Descripciones narrativas y lenguaje coloquial Estrategias de suma y resta informales o espontáneas.
Valorar el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en los procesos de resolución de problemas de suma y resta de fracciones desarrollados por los estudiantes.	Tránsito de la matematización horizontal a la vertical	Principios de Niveles El "modelo de" (esquemas fieles vinculados directamente al contexto). El "modelo para" (la recta numérica o regla métrica como herramienta de razonamiento relacional abstracto).

Participantes

La delimitación de los sujetos de estudio constituye un componente medular de la presente investigación. La determinación poblacional persigue la comprensión situada de los fenómenos dentro de su contexto natural. Los sujetos de estudio corresponden a una muestra no probabilística por conveniencia, estrategia de selección que se justifica directamente por los presupuestos y necesidades operativas de la investigación-acción. En este método, la docente-investigadora ejerce simultáneamente el rol de mediador didáctico e indagador en su propio escenario laboral, lo que garantiza un acceso directo, continuo y sin restricciones al grupo de estudiantes durante el periodo delimitado para la intervención.

Los participantes de la presente investigación estuvieron conformados por un grupo de 26 estudiantes de tercer grado de educación primaria, pertenecientes a una institución pública de organización completa ubicada en la capital del estado de San Luis Potosí. La selección de este grupo respondió a criterios de accesibilidad y pertinencia metodológica, propios de la investigación-acción, al constituir el contexto de intervención de la docente-investigadora durante su proceso de formación profesional.

La institución se encuentra adscrita al sistema de educación básica y atiende a una población escolar proveniente de diversos contextos socioculturales. El grupo participante estuvo integrado por niñas y niños cuyas edades oscilaban entre los 8 y 10 años, rango correspondiente al grado escolar en el que se desarrolló la intervención didáctica.

De acuerdo con los planteamientos de la NEM, el tercer grado de primaria representa un momento relevante para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que las y los estudiantes amplían progresivamente su comprensión de los números fraccionarios y fortalecen sus capacidades para resolver problemas vinculados con situaciones de la vida cotidiana. En este sentido, el estudio se centró en analizar y favorecer la construcción de significados relacionados con la suma y resta de fracciones mediante procesos de matematización horizontal y vertical.

Ruta Metodológica

La ruta metodológica se organizó en cuatro momentos interrelacionados:

Exploración diagnóstica

Se realizó la identificación de los conocimientos previos, dificultades y estrategias empleadas por las y los estudiantes en relación con las fracciones y sus operaciones. Para ello se aplicaron actividades diagnósticas, registros de observación y análisis de producciones escolares.

Planificación de la intervención

Con base en los resultados obtenidos durante el diagnóstico, se diseñó una secuencia didáctica fundamentada en los principios de la EMR, incorporando situaciones contextualizadas que promovieron procesos de matematización horizontal y vertical.

Implementación de la intervención

Se desarrollaron las actividades didácticas previstas, favoreciendo el uso de materiales concretos, representaciones gráficas, estrategias de resolución de problemas y espacios de argumentación matemática. Durante esta fase se recuperaron evidencias mediante diarios de campo, registros de observación y producciones de los estudiantes.

Reflexión y evaluación de la acción

Finalmente, se analizaron las evidencias obtenidas para valorar las transformaciones observadas en los procesos de aprendizaje del alumnado, particularmente en la comprensión de la suma y resta de fracciones. Esta fase permitió identificar avances, dificultades persistentes y áreas de mejora para futuras intervenciones pedagógicas.

De esta manera, la ruta metodológica articuló un proceso cíclico de diagnóstico, acción, observación y reflexión, característico de la investigación-acción, orientado a comprender y fortalecer el aprendizaje de las fracciones en estudiantes de tercer grado de educación primaria.

Capítulo IV. Del Diagnóstico Disciplinar a la Intervención Didáctica: Análisis del Tránsito de la Matematización Horizontal a la Vertical

El presente capítulo expone el proceso de implementación, análisis y evaluación de la intervención didáctica diseñada para favorecer el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en estudiantes de tercer grado de educación primaria durante la resolución de problemas de suma y resta de fracciones. En congruencia con el enfoque de investigación-acción y los postulados de la EMR, el análisis se centra en comprender cómo los estudiantes construyeron significados matemáticos a partir de situaciones contextualizadas, así como en identificar las transformaciones que experimentaron sus estrategias de resolución, representaciones y formas de argumentación a lo largo de la intervención.

La organización del capítulo responde a la lógica metodológica planteada en la investigación. En primer lugar, se presenta el diagnóstico disciplinar del grupo, cuyo propósito fue identificar los conocimientos previos, concepciones iniciales y dificultades relacionadas con la construcción del número fraccionario. Posteriormente, se describe la intervención docente fundamentada en los principios de la EMR, detallando las situaciones problemáticas implementadas, los recursos utilizados y las decisiones didácticas que orientaron el acompañamiento pedagógico. Finalmente, se desarrolla el análisis y la evaluación de las evidencias generadas durante el proceso, con la finalidad de valorar los avances de los estudiantes y reconocer los microtránsitos que permitieron la evolución de representaciones informales hacia formas de pensamiento matemático más estructuradas.

Más que presentar únicamente los resultados obtenidos, este capítulo busca reconstruir el proceso mediante el cual los estudiantes resignificaron el concepto de fracción como una magnitud susceptible de ser medida, comparada, compuesta y transformada. Desde esta perspectiva, el análisis de las producciones estudiantiles, las interacciones generadas en el aula y las estrategias emergentes permitieron comprender cómo la contextualización, el uso de modelos mediadores y la reinención guiada contribuyeron al desarrollo progresivo de procesos de matematización. Así, la intervención se concibe no solo como una estrategia para enseñar contenidos matemáticos, sino como un espacio de transformación pedagógica que posibilitó la construcción de conocimientos con sentido y significado para los estudiantes.

Diagnóstico Disciplinar del Grupo

El diagnóstico disciplinar constituyó la fase inicial de la investigación y tuvo como propósito identificar las concepciones previas, estrategias de resolución y formas de razonamiento que los estudiantes habían construido en relación con las nociones matemáticas que anteceden al aprendizaje de las fracciones. Desde la perspectiva de la EMR, conocer estas estructuras iniciales resultó fundamental para comprender las posibilidades y limitaciones del grupo antes de la intervención, así como para diseñar situaciones didácticas congruentes con sus necesidades de aprendizaje. En este sentido, el diagnóstico no se concibió únicamente como un procedimiento de evaluación inicial, sino como una herramienta de análisis que permitió reconocer los conocimientos disponibles, los obstáculos conceptuales presentes y las formas de matematización predominantes en el alumnado.

Características de los Instrumentos que Conforman el Diagnóstico

Se recuperó información proveniente de tres instrumentos complementarios. El primero correspondió a una prueba diagnóstica estandarizada orientada a identificar el dominio de contenidos matemáticos previos relacionados con el pensamiento aditivo, multiplicativo, la medida y las estructuras numéricas necesarias para la comprensión posterior de las fracciones. El segundo instrumento consistió en un Ejercicio Integrador de Aprendizaje de carácter situado, mediante el cual se exploró la capacidad de los estudiantes para establecer relaciones entre magnitudes, unidades de referencia y equivalencias en contextos vinculados con situaciones de la vida cotidiana.

Finalmente, se aplicó un instrumento específico sobre reparto y partición que permitió analizar las concepciones iniciales de los estudiantes respecto a la construcción de la unidad, la distribución equitativa, la representación de cantidades fraccionarias y la interpretación de las relaciones parte-todo. La triangulación de la información obtenida a través de estos tres instrumentos permitió construir una caracterización integral del grupo y establecer las bases para el diseño de la intervención didáctica en congruencia con el objetivo de este estudio.

Primer Instrumento: Prueba Estandarizada

El primer momento del proceso de diagnóstico se sustentó en la aplicación de un examen escrito de opción múltiple diseñado por la Editorial LEIREM, proporcionado de manera institucional para la evaluación de los aprendizajes al inicio del ciclo escolar 2025-2026. Este instrumento (Anexo A) se caracteriza por ser una prueba de rendimiento estandarizada, cuyo propósito es medir el nivel de retención y dominio procedimental de los contenidos curriculares correspondientes al grado inmediato anterior.

En el área específica de matemáticas, el instrumento se conformó por 25 ítems de opción múltiple, cada uno estructurado con un problema o una consigna operativa y cuatro opciones de respuesta, donde solo una de ellas es correcta. La estructura de esta prueba permitió evaluar los aprendizajes de los alumnos respecto a contenidos relacionados con el pensamiento numérico, algebraico, geométrico y métrico.

Dicho instrumento está planteado para evaluarse de manera sumativa. Esto implica que el examen se centra en valorar la ejecución correcta de los algoritmos convencionales y el reconocimiento de conceptos del sistema de numeración decimal dentro del conjunto de los números naturales. Al ser una prueba con respuestas preestablecidas, su estructura general delimita la evaluación a las respuestas correctas o incorrectas por parte de los alumnos.

A fin de sistematizar el análisis del primer instrumento, se diseñaron dos matrices de congruencia. La primera clasifica la totalidad de los reactivos según sus dimensiones curriculares, mientras que la segunda recolecta los ítems que anteceden el aprendizaje de los números racionales y, en específico, las fracciones.

Tabla 4

Matriz de congruencia curricular del examen diagnóstico (LEIREM)

Indicador	Ítems	Contenido específico	Descripción
Sistema de Numeración Decimal y	4, 5, 6, 7, 12, 14	Agrupamiento en base 10, lectura de la recta numérica,	Número entero (unidades, decenas, centenas y millares) mediante contextos discretos

Valor Posicional		descomposiciones aditivas y relaciones de orden.	(dinero, útiles) y la linealidad del orden numérico.
Pensamiento Aditivo y Multiplicativo	2, 8, 9, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24	Algoritmos directos de suma/resta, problemas de cambio y combinación, arreglos rectangulares, dobles y complementariedad.	Operaciones matemáticas y problemas con estructuras aritméticas enteras directas o inversas.
Magnitudes, Medida y Unidades de Referencia	1, 3, 10, 11, 25	Organización cronológica (tiempo), unidades convencionales (longitud y capacidad) y relaciones de tamaño.	Atributos medibles del entorno. Uso del calendario, el metro y el litro, y capacidad en magnitudes continuas.
Pensamiento Geométrico y Visualización Espacial	18	Caracterización de figuras bidimensionales (cuadriláteros).	Clasificación geométrica y propiedades de figuras de cuatro lados rectos.

A partir de esta delimitación global, cobra relevancia para el objeto de estudio un subconjunto particular de reactivos. Como se detalla en la Tabla 6, estos reactivos exploran las estructuras lógicas necesarias para la comprensión aditiva y las magnitudes discontinuas y continuas.

Tabla 5

Matriz de congruencia de los ítems base para el aprendizaje de fracciones

Ítem	Indicador	Contenido del ítem	Descripción de la Tarea
10	Magnitudes, Medida y Unidades de Referencia	Proporcionalidad inversa en unidades de medida de capacidad.	El alumno debe explicar por qué un recipiente requiere 10 unidades de medida y otro solo 5, deduciendo que la segunda unidad es el doble de grande.
11		Estimación y reconocimiento de la	El estudiante identifica, a partir de una ilustración, qué recipientes poseen un

		unidad de capacidad (el litro).	volumen de retención superior a un litro de magnitud continua.
16		Problema aditivo de sustracción con estructura semántica de "Cambio / Pérdida".	Situación donde un sujeto posee 100 elementos discretos y pierde 27, demandando calcular el residuo operativo.
17	Estructuras Aritméticas (Pensamiento Aditivo)	Problema aditivo de adición con estructura de "Cambio / Incremento".	Escenario con un conjunto inicial de 25 elementos al que se le adiciona una cantidad determinada, exigiendo el cálculo del total.
19		Búsqueda de un complemento algebraico en una cadena aditiva ($72 + 38 + 27 + 23 + \underline{\quad} = 200$).	Exige al alumno sumar una serie de números naturales y determinar el valor faltante exacto para aproximarse a una centena superior fija.

Los ítems relacionados con la dimensión métrica y de proporcionalidad inversa se caracterizan por trasladar el pensamiento del estudiante fuera del conteo de colecciones discretas para situarlo en el terreno de las magnitudes continuas y la estimación de la capacidad, utilizando el "litro" y unidades de medida relacionales.

El ítem 10 evalúa la comprensión de la variación inversamente proporcional entre el tamaño de una unidad y la cantidad de veces que esta cabe en un espacio determinado. Esta noción lógica constituye la propiedad del denominador en las fracciones. El ítem 11, por su parte, mide el reconocimiento de la unidad de referencia o "todo" continuo.

Para la EMR, diagnosticar si el alumno comprende estas relaciones en contextos realistas y concretos es fundamental, ya que el acto de medir y comparar la fragmentación de un líquido es la génesis didáctica que justifica la necesidad de crear el número racional ante la insuficiencia del número natural.

Los reactivos de la dimensión de flexibilidad estructural se caracterizan por explorar los significados semánticos de las operaciones de suma y resta y la reversibilidad del pensamiento aritmético en el contexto del número entero.

Los Ítems 16 y 17 plantean problemas con estructuras verbales de "cambio" (perder y ganar elementos). Su función en el diagnóstico es determinar si el niño ha consolidado el sentido operativo de la suma como reunión y de la resta como pérdida de magnitudes. El Ítem rompe el esquema de la operación directa ($a + b = c$), exigiendo la búsqueda de un complemento algebraico intermedio para completar una cantidad superior ($72 + 38 + 27 + 23 + __ = 200$).

Estos ítems demuestran la capacidad del alumno para realizar tanteos interactivos y descomposiciones flexibles, habilidades que de acuerdo con Llinares y Sánchez García (1997) resultan indispensables para que los estudiantes de tercer grado abandonen la rigidez del conteo lineal y comiencen a calcular complementos en la suma y resta de fracciones.

Caracterización del Instrumento 2: Ejercicio Integrador de Aprendizaje (EIA)

El segundo momento de la fase diagnóstica consistió en la aplicación del ejercicio integrador de aprendizaje titulado "La falta de agua, un problema que nos afecta a todos" (Anexo B). Este instrumento fue diseñado y emitido por la SEP (2025) en el marco de la evaluación diagnóstica nacional para la Fase 4 (tercer y cuarto grados de educación primaria). A diferencia del primer instrumento, el EIA tiene de carácter una evaluación situada, formativa e interdisciplinaria. Su propósito no es la simple medición del acierto o error en operaciones aisladas, sino la valoración de los aprendizajes fundamentales en contextos problemáticos de la realidad, demandando del alumno explicaciones con sus propias palabras, producciones gráficas y razonamientos lógicos.

El planteamiento sitúa al estudiante ante una problemática de relevancia social: la escasez, cuidado y distribución del agua en su comunidad. A través de consignas abiertas y reactivos de análisis, el instrumento explora contenidos de los Campos Formativos de Lenguajes, Ética, Naturaleza y Sociedades, y Saberes y Pensamiento Científico, a través de representaciones visuales e icónicas (botellas, cubetas y tambos) para que los alumnos realicen conteos, estimaciones y establezcan relaciones de equivalencia basadas en capacidades volumétricas concretas.

El análisis analítico de este segundo instrumento revela que el ítem 4 (incisos a y b) constituye el eje con mayor peso para los fines de esta investigación. El reactivo 4 introduce un escenario idóneo para diagnosticar las estructuras previas al número racional, específicamente de los números fraccionarios.

El reactivo plantea una situación donde cuatro personajes (Luis, Dana, Teresa y Felipe) recolectan agua en contenedores de diferentes tamaños. Técnicamente, el ítem establece una escala relacional fija:

- Una botella equivale a 1 Litro.
- Una cubeta equivale a 10 botellas.
- Un tambo equivale a 10 cubetas.

Para la EMR, este diseño posee una riqueza importante. No se le pide al alumno operar con números descontextualizados; se le plantea una situación de la vida diaria que dota de sentido a la actividad matemática. Diagnosticar si el alumno puede organizar conceptualmente este escenario permite identificar su nivel de matematización horizontal, es decir, su capacidad para traducir una situación real a un esquema de relaciones matemáticas.

El inciso a exige que el estudiante cuente, convierta y registre en una tabla de doble entrada la cantidad de agua total en litros que posee cada personaje, combinando el conteo de tambos, cubetas y botellas. Esta tarea evalúa de forma directa si el alumno comprende que una misma cantidad física puede expresarse a través de unidades de diferente orden o magnitud.

Esta habilidad es el cimiento fundamental de la noción de fracción equivalente. Si un niño es capaz de comprender que una cubeta representa un "todo" compuesto por diez partes (botellas) y que un tambo es un "todo" superior, estará desarrollando la estructura mental necesaria para entender posteriormente que un entero puede fraccionarse y expresarse en medios, cuartos u octavos sin alterar la cantidad total de la magnitud.

El inciso b) introduce preguntas para la argumentación del alumno, tales como: “Dana dice que Teresa tiene más agua que Luis, porque tiene muchas botellas. ¿Es cierto? Explica tu respuesta”. Este cuestionamiento interroga la lógica de los estudiantes.

Esta pregunta funciona como un indicador predictivo para detectar el obstáculo de la intuición lineal. El alumno con un pensamiento aritmético rígido responderá que Teresa tiene más agua simplemente porque visualiza "muchas unidades" individuales (las botellas), sin considerar el valor o volumen real del contenedor mayor (el tambo). De acuerdo con Llinares y Sánchez García (1997), descubrir si el niño puede argumentar superando la apariiencia visual de la cantidad de piezas es indispensable antes de la intervención didáctica. Si el alumno se guía

solo por el número de botellas, reproducirá idéntico patrón con las fracciones, asumiendo erróneamente que $\frac{4}{16}$ es mayor que $\frac{1}{2}$ solo por la presencia de números nominalmente más grandes.

A fin de sistematizar esta articulación, los componentes conceptuales del Ejercicio Integrador de Aprendizaje (EIA-02) se han estructurado en la siguiente matriz de congruencia focalizada.

Tabla 6

Matriz de congruencia del instrumento 2 (EIA-02 SEP)

Componente del Ítem	Contenido específico	Tarea cognitiva solicitada	Articulación con el objeto de Estudio (Fracciones / EMR)
Ítem 4, inciso a (Tabla de registro)	Establecimiento de equivalencias de capacidad mediante unidades compuestas (base 10).	Contar de manera iterativa tambos, cubetas y botellas, multiplicando y sumando para unificar los valores en la unidad base de litros.	Andamiaje para la composición y descomposición de la unidad: Evalúa la flexibilidad para transitar entre el "todo" y sus partes constitutivas en una magnitud continua, principio base para la suma de fracciones mediante unidades de referencia.
Ítem 4, inciso b (Pregunta de comparación y argumentación 1)	Identificación y comparación del sujeto con menor volumen de agua.	Analizar los datos de la tabla, contrastar los totales numéricos y justificar verbalmente qué combinación de recipientes representa la menor cantidad.	Validación del Sentido de Magnitud: Verifica si el alumno comprende las relaciones de orden en contextos continuos medibles, habilidad requerida para jerarquizar fracciones e identificar residuos o faltantes para el entero.
Ítem 4, inciso b (Pregunta de argumentación 2: Caso Teresa vs. Luis)	Ruptura del sesgo perceptivo numérico frente al valor posicional o	Evaluar críticamente una afirmación errónea basada en la apariencia visual de "muchas botellas", argumentando por	Mide la capacidad del alumno para desconectar el conteo directo de objetos del valor real de la magnitud. Es el indicador predictivo clave para evitar que el alumno asuma que un

relacional de la unidad.	qué un contenedor mayor (tambo) supera el volumen de unidades fraccionadas.	denominador mayor genera una fracción más grande.
-----------------------------	---	--

Características del Instrumento 3: Parto y Reparto

El tercer instrumento de la fase diagnóstica corresponde a una prueba de problemas situados diseñada de manera específica para esta investigación, denominada "Instrumento de diagnóstico: parto y reparto" (Anexo C). Este fue estructurado con el propósito de explorar los conocimientos de los alumnos de tercer grado sobre las fracciones.

El instrumento consta de 13 situaciones problemáticas contextualizadas y un apartado final de diálogo conversacional. Desde la perspectiva didáctica de Llinares y Sánchez García (1997), el diseño busca confrontar al alumno con los diferentes significados de la fracción (relación parte-todo, reparto equitativo, operador y medida), utilizando tanto magnitudes continuas (pizzas, pasteles, jarras, rectángulos, tortillas) como magnitudes discretas (chocolates, canicas, estudiantes, pelotas), lo que permite cartografiar la flexibilidad del pensamiento proporcional del grupo antes de la intervención didáctica.

Las 13 situaciones problema en las que se estructura el instrumento diagnóstico se agrupan bajo las siguientes categorías:

Bloque 1: Situaciones de reparto equitativo y fraccionamiento continuo (ítems 1 y 2): En el problema “La pizza compartida”, el alumno tenía que repartir 2 unidades enteras entre 8 sujetos, evaluando la emergencia de la fracción propia ($\frac{2}{8}$ o $\frac{1}{4}$ por niña). En “El pastel de cumpleaños”, el problema opera a la inversa: la unidad ya está fraccionada en doceavas partes, y se evalúa si el alumno comprende la suma de porciones dentro de un entero continuo (4 personas, a cada una habría que darle 2 rebanadas, lo que daba un total de 8 rebanadas por consumir, es decir, $\frac{8}{12}$).

Bloque 2: Magnitudes continuas y variables de capacidad (ítems 3, 5 y 9): los problemas “Los vasos de agua”, “El rectángulo de colores” y “Rebanadas de pizza” evalúan la fracción como medida y relación de volumen.

Bloque 3: Fracción en conjuntos de magnitudes discretas (ítems 4, 6, 7 y 8): este bloque evalúa si el niño trasciende la unidad simple. En “Reparto de chocolates” (24 entre 6) y “El grupo de canicas” (18 entre 3), el alumno debe hallar una fracción de un conjunto numerable. “La fila del receso” analiza el agrupamiento equitativo de un conjunto discreto. En el ítem 8 (“Compartiendo pelotas”) el problema solicita repartir 9 pelotas entre 3 equipos de fútbol.

Bloque 4: Modelos lineales, equivalencias y medida temporal (ítems 10, 11, 12, 13 y diálogo conversacional). El problema de “un chocolate” analiza la relación parte-todo al representar una barra dividida en cuatro partes iguales y una porción consumida. El problema “La recta” introduce la noción de longitud y el salto de la rana como unidad métrica, mientras que “¿Es más que...?” evalúa la noción de equivalencia fraccionaria empleando un modelo circular común en el contexto de una tortilla). Finalmente, “El tiempo del partido” hace uso de la fracción como operador del tiempo discreto (una tercera parte de 60 minutos), conectando directamente con el diálogo conversacional individualizado que indaga sobre las representaciones en torno al concepto “un medio”.

Tabla 7

Ítems que integran el instrumento 3

Ítem original	Dimensión teórica de la fracción	Tipo de magnitud	Demanda cognitiva	Criterio de análisis cualitativo
1. La pizza	Reparto equitativo (Cociente).	Continua	Dividir 2 enteros entre 8 receptores sin que sobre nada.	Observar si realizan cortes simétricos y si identifican la porción individual como $\frac{2}{8}$ o su equivalente $\frac{1}{4}$.

2. El pastel	Parte-todo (Suma de porciones).	Continua	Consumo de 2 rebanadas por cada uno de los 4 amigos sobre un total de 12.	Verificar si identifican el total consumido ($\frac{8}{12}$) y la porción sobrante ($\frac{4}{12}$) mediante el coloreado.
3. Los vasos	Parte-todo (Medida / Capacidad).	Continua	Representar el residuo de una jarra de 6 vasos tras servir 2.	Evaluar si el alumno logra aislar las 4 unidades restantes como la fracción propia de $\frac{4}{6}$ de la jarra.
4. Chocolates	Fracción de un conjunto (Reparto).	Discreta	Repartir 24 chocolates (2 cajas de 12) entre 6 sobrinos.	Analizar si el estudiante utiliza el reparto uno a uno o si agrupa de forma multiplicativa (4 chocolates por niño).
5. Portada	Parte-todo (Área / Regiones).	Continua	Dividir un rectángulo en cuartos empleando tres colores distintos.	Determinar si el alumno comprende que dos cuartas partes ($\frac{2}{4}$) equivalen a la mitad de la superficie de la portada.
6. Canicas	Fracción de un conjunto (Partición).	Discreta	Dividir una colección de 18 elementos en tres subcolecciones iguales.	Evaluar el reconocimiento de que cada color representa una tercera parte ($\frac{1}{3}$) del conjunto, equivalente a 6 canicas.
7. La fila	Fracción como operador de arreglos.	Discreta	Determinar la cantidad de equipos posibles con 20 niños bajo una constante de gorras.	Identificar si el alumno utiliza la división o el agrupamiento cardinal para determinar los integrantes por equipo.

8. Pelotas	Fracción de un conjunto (Operador).	Discreta	Repartir 9 pelotas entre 3 equipos (Duplicado analítico de ítem 6).	Verificar consistencia en el manejo de colecciones discretas; determinar si identifican la porción como $\frac{3}{9}$ o $\frac{1}{3}$.
9. Pizza Luis	Parte-todo (Sustracción implícita).	Continua	Representar un entero de 8 partes y restar 3 porciones de consumo.	Evaluar si diferencian cualitativamente la parte comida ($\frac{3}{8}$) de la fracción complementaria del entero ($\frac{5}{8}$).
10. Chocolate	Parte-todo (Área / Regiones).	Continua	Fraccionar una barra en 4 partes simétricas y extraer una unidad.	Observar si el dibujo respeta la condición de equidad de las partes para dar validez geométrica a la fracción $\frac{1}{4}$.
11. La recta	Fracción como Medida (Longitud).	Continua	Ubicar el punto medio de un segmento y proyectar una unidad y media (1.5).	Monitorear el uso de la recta numérica y la noción de distancia más allá del conteo de superficies cerradas.
12. Tortillas	Equivalencia (Fracción propia).	Continua	Contrastar empíricamente si $\frac{2}{4}$ representa mayor o igual área que $\frac{1}{2}$.	Crucial: Evaluar si el alumno rompe el sesgo natural o si afirma que $\frac{2}{4}$ es más grande debido a los numerales 2 y 4.
13. Videojuego	Fracción como operador del tiempo.	Continua	Calcular una tercera parte de una hora (60 min) y proyectar consumos en 1 h 40 min.	Analizar la transición hacia el pensamiento formal abstracto; exige convertir la fracción de hora a minutos reales (20 min).

Diálogo conversacional	Representación semántica y conceptual.	N/A	Explicar verbal y gráficamente el concepto de mitad y mitad de la mitad.	Evaluar el lenguaje matemático y la conceptualización de la fracción de otra fracción ($\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$).
------------------------	--	-----	--	---

La naturaleza metodológica de este dispositivo no responde a los criterios de una evaluación estandarizada tradicional, sino que se configura como un instrumento de lápiz y papel de carácter exploratorio, diseñado específicamente para cartografiar el estado inicial de los 25 alumnos del grupo frente al concepto de fracción.

El instrumento se conformó de 13 situaciones problemáticas contextualizadas y una sección final de diálogo conversacional individualizado, los cuales guían al estudiante a través de narrativas cercanas a su entorno inmediato, tales como el reparto de comida en celebraciones, la distribución de colecciones de juguetes y la estimación de capacidades y distancias métricas. El diseño de estos reactivos plantea magnitudes continuas y discretas de forma balanceada, lo que permite evaluar el nivel de flexibilidad conceptual del educando al enfrentarse tanto a la fragmentación geométrica de superficies homogéneas como a la partición de conjuntos numéricos finitos.

De acuerdo con los principios de la EMR, el aprendizaje de las matemáticas no debe iniciar con la imposición formal de algoritmos y reglas de operación descontextualizadas, sino mediante un proceso donde el alumno dote de sentido matemático a una situación de la realidad. En este sentido, el instrumento actúa como un dispositivo de evaluación de la matematización horizontal, puesto que cada uno de los problemas planteados demanda que el estudiante organice, esquematice y resuelva un escenario realista utilizando sus propias estrategias de representación gráfica, reparto intuitivo o conteo aditivo, antes de verse forzado a utilizar la notación simbólica formal de las fracciones. Medir el desempeño del grupo en este nivel es indispensable para identificar si los alumnos poseen los esquemas intuitivos básicos para construir el concepto de fracción como un objeto con significado propio.

Asimismo, el instrumento se vincula con la detección del obstáculo del número natural, una dimensión teórica central en esta investigación y ampliamente documentada por Llinares y

Sánchez García (1997). Al transitar de los números enteros a los fraccionarios, los niños suelen aplicar de manera rígida e incorrecta las reglas de la aritmética natural a las magnitudes fraccionarias. El Instrumento 3 incluye reactivos diseñados de manera intencional para hacer emerger este sesgo, particularmente en la situación “¿Es más que...?”, donde se insta al alumno a contrastar si dos cuartas partes representan una porción mayor o igual que un medio utilizando modelos circulares de tortillas.

El análisis de las producciones e interpretaciones de los alumnos en este reactivo particular —así como en el escenario temporal de “el tiempo del partido” y las preguntas guía del diálogo conversacional— ofrece un diagnóstico predictivo. Permite determinar si el estudiante evalúa las fracciones de manera relacional, comprendiendo el papel que juega el denominador en la fragmentación de la unidad de referencia, o si permanece atrapado en una intuición lineal donde asume que cifras numéricamente más grandes implican necesariamente magnitudes mayores.

Finalmente, la correspondencia del instrumento con las operaciones de suma y resta se justifica al examinar los reactivos que exploran la composición y descomposición de la unidad, como ocurre en las situaciones de “El pastel de cumpleaños” y “El rompecabezas fraccionado de la pizza”. En estos problemas, el alumno se ve en la necesidad implícita de sumar porciones discretizadas dentro de un entero continuo o bien de calcular la fracción complementaria que queda tras un consumo determinado. Evaluar cualitativamente los métodos de conteo, las estrategias geométricas y las explicaciones verbales plasmadas por las y los niños en estas consignas proporciona el punto de partida indispensable para justificar el diseño de la intervención didáctica.

Resultados Obtenidos de los Instrumentos del Diagnóstico

Primer Instrumento. La Prueba LEIREM

Al analizar los resultados obtenidos por los 25 alumnos en las dimensiones clave del examen diagnóstico LEIREM, los datos revelan una consolidación favorable en los algoritmos mecánicos directos, en contraste con una marcada debilidad al enfrentar aquellos reactivos que exigen una conceptualización relacional de las magnitudes de tipo continuo.

En lo concerniente al ítem 10 asociado al contenido de *proporcionalidad inversa en unidades de medida de capacidad*, el cual evalúa la comprensión de la variación entre el tamaño de una unidad y la cantidad de veces que esta cabe en un espacio determinado, arrojó un rendimiento polarizado. Únicamente el 32% del grupo (8 alumnos de la muestra total) logró deducir con éxito que la segunda unidad de medida poseía una capacidad equivalente al doble de la primera. El 68% restante (17 alumnos) falló en la resolución de la tarea al vincular mecánicamente el numeral más alto (diez unidades) con un volumen físicamente mayor.

Este comportamiento se complementa con los resultados del ítem 11, enfocado en *la estimación y reconocimiento de la unidad de capacidad* a través de la estimación del volumen respecto al litro, donde el porcentaje de asertividad fue del 48% (12 alumnos). El 52% restante de la muestra (13 alumnos) evidenció dificultades para reconocer el contenedor que tenía mayor capacidad, aun cuando era posible deducirlo por su tamaño.

Por otro lado, los reactivos del indicador *estructuras aritméticas orientadas al pensamiento aditivo* manifestaron un comportamiento caracterizado por el dominio de las estructuras aritméticas lineales. Los ítems 16 y 17, diseñados para evaluar el sentido operativo de la suma y resta en colecciones discretas bajo estructuras de cambio (perder y ganar elementos), consolidaron los índices de logro más altos de la evaluación, alcanzando un 76% (19 alumnos) y un 80% (20 alumnos) de respuestas correctas respectivamente.

Estos porcentajes confirman que las tareas de ejecución directa sobre conjuntos numerables finitos se encuentran fuertemente integradas en los procesos informales del grupo. No obstante, esta aparente solidez algorítmica se fractura al alterar el orden de la ecuación tradicional ($a + b = c$). En el ítem 19, el cual exige romper la unidireccional mediante la búsqueda de un número faltante que permitiera completar una centena superior ($72 + 38 + 27 + 23 + \underline{\quad} = 200$), el nivel de éxito decayó drásticamente al 40% (10 alumnos). El 60% de los estudiantes (15 alumnos) que erraron en la selección de la respuesta procedieron a realizar sumas lineales de todos los numerales visibles o ignoraron el equilibrio que impone el signo de igualdad, revelando una dependencia estricta hacia los algoritmos mecánicos tradicionales.

De acuerdo con Llinares y Sánchez García (1997), la capacidad de realizar descomposiciones flexibles y buscar complementos numéricos constituye una habilidad cognitiva indispensable para que los alumnos de tercer grado abandonen la linealidad del conteo

entero y transiten con éxito hacia la suma y resta de fracciones. El contraste entre la alta eficacia en las operaciones directas y el descenso en las tareas métrico-relacionales corrobora que el grupo ingresa al ciclo escolar con estructuras aritméticas enteras funcionales, pero carentes de los esquemas de variación inversa y reversibilidad necesarios para acceder al concepto de fracción.

Tabla 8

Sistematización de resultados de los ítems base para el aprendizaje de fracciones

Número de ítem	Frecuencia de éxito (f)	Porcentaje de logro (%)
10	8	32%
11	12	48%
16	19	76%
17	20	80%
19	10	40%

Resultados del Ejercicio Integrador de Aprendizaje

Al profundizar en la sistematización de los resultados obtenidos tras la aplicación del Ejercicio Integrador de Aprendizaje (EIA-02), en el análisis de las respuestas y procedimientos realizados por los alumnos en el ítem 4, inciso a), el cual demandaba contar, realizar conversiones volumétricas y registrar en una tabla de doble entrada la cantidad total de litros recolectada por cada personaje, se observó una marcada brecha entre la ejecución del conteo icónico elemental y la capacidad para establecer equivalencias formales de magnitudes continuas en base 10.

Los registros empíricos del grupo revelan que el 44% de los estudiantes logró cumplimentar de forma correcta el recuento e identificación de las piezas icónicas (tambos, cubetas y botellas) dentro de la tabla, manifestando un dominio adecuado al transcribir los datos visuales del problema. Sin embargo, al momento de realizar la unificación de valores bajo la unidad de medida de referencia común (el litro), emergieron dificultades generalizadas. Diversos alumnos registraron la información cualitativa de manera óptima, pero erraron o dejaron inconclusas las conversiones y el cálculo del total de litros solicitados, mientras que en otros

casos se confundieron las entradas de registro al realizar las sumas iterativas o se presentaron datos inconclusos y poco sistemáticos.

Desde las categorías teóricas de la EMR, este comportamiento cognitivo evidencia que, si bien los alumnos logran operar dentro del nivel situacional y referencial básico al describir el contexto inmediato ("el modelo de" la situación), carecen de las herramientas algebraicas y de los esquemas de abstracción necesarios para transformar dichos datos en un "modelo para" el razonamiento matemático, el cual constituye el cimiento indispensable de la noción de equivalencia.

Al no consolidar la noción de que una unidad colectiva representa un todo compuesto jerárquicamente por diez partes y que a su vez es la décima parte de un contenedor mayor, los estudiantes manifiestan dificultades para operar de forma flexible con la composición y descomposición de la unidad, una habilidad que la literatura científica identifica como la condición para comprender que un entero puede fraccionarse y expresarse en diferentes denominaciones sin alterar la magnitud global.

Esta problemática se vuelve aún más evidente al analizar las respuestas del inciso b), donde se interroga directamente la lógica relacional de los alumnos mediante un cuestionamiento sobre si un personaje tiene más agua que otro, bajo el único argumento visual de poseer una mayor cantidad física de recipientes individuales.

Las respuestas abiertas proporcionadas por los estudiantes reflejan la persistencia del sesgo del número natural en la mayoría de los casos. Un 64% de los alumnos afirmó explícitamente en sus explicaciones que dicha aseveración era correcta, justificando que el poseer "muchas botellas" implicaba intrínsecamente un mayor volumen, cayendo de forma directa en el distractor provocado por la apariencia numérica y el conteo cardinal de piezas individuales. Para estos estudiantes, el hecho de observar un numeral nominalmente más alto anula la noción del orden y la proporcionalidad de los contenedores mayores, asumiendo erróneamente que una cantidad elevada de partes fragmentadas supera al volumen concentrado en unidades de orden superior.

Por el contrario, únicamente una minoría del grupo, equivalente al 36%, logró romper este sesgo perceptivo numérico mediante el uso de argumentos de valor posicional. Los alumnos

que alcanzaron el éxito argumentaron que los personajes no poseían la misma cantidad debido a la equivalencia jerárquica de los contenedores, explicitando que un conjunto de diez botellas equivale exactamente a una cubeta completa, logrando con ello aislar el valor numérico absoluto para situar su pensamiento en la equivalencia de las porciones continuas. Estos estudiantes lograron descomponer analíticamente los elementos e indicar que la afirmación evaluada era falsa debido a que el volumen concentrado en los contenedores mayores supera ampliamente el conteo de unidades fraccionadas superficiales.

Como advierten Llinares y Sánchez García (1997), descubrir y mapear estas respuestas es un indicador predictivo crucial antes de iniciar el diseño de las secuencias didácticas de fracciones. Si la mayoría de los participantes tiende a evaluar el volumen guiándose de forma exclusiva por la cantidad nominal de unidades físicas, este mismo patrón se reproducirá de forma idéntica al introducir formalmente los números fraccionarios, induciendo al alumno a concluir equivocadamente que la fracción $\frac{4}{16}$ es mayor que $\frac{1}{2}$ debido a que contiene numerales nominalmente más grandes en sus componentes aritméticos.

Tabla 9

Sistematización de resultados del instrumento 2 (EIA-02 SEP)

Número de ítem e inciso	Frecuencia de éxito (f)	Porcentaje de logro (%)	Tendencia de error detectado
Ítem 4, inciso a (tabla de registro y conversiones)	11	44%	Registro icónico correcto pero incapacidad operativa para realizar las conversiones y unificar el total en litros.
Ítem 4, inciso b (pregunta de comparación 1)	13	52%	Incongruencia entre los datos numéricos calculados en la tabla y la justificación escrita de equivalencia.

Ítem 4, inciso b (pregunta de argumentación 2)	9	36%	Sesgo del número natural: afirmación de superioridad volumétrica basada solo en el conteo de piezas físicas.
--	---	-----	---

Tercer instrumento: Parto y Reparto

La sistematización de las producciones gráficas y respuestas verbales del grupo de tercer grado frente al Instrumento 3 permitió cartografiar el estado inicial en torno al conocimiento de fracciones en su dimensión de matematización horizontal, revelando las tensiones producidas por el anclaje en la aritmética del número entero como base intuitiva.

Al cuantificar el nivel de logro general, se observa que los ítems correspondientes al Bloque 1 (situaciones de reparto equitativo y fraccionamiento continuo) muestran un desempeño sumamente polarizado; en el ítem de "la pizza compartida" (repartir 2 pizzas entre 8 niños), el 40% del grupo (10 alumnos) logró ejecutar con éxito la estrategia de partir cada unidad en octavos y asignar dos rebanadas por persona, manifestando la emergencia de la fracción como cociente en *el nivel situacional*. Por otra parte, un 24% de la muestra (6 alumnos) optó por una estrategia alternativa en la cual repartieron ambas pizzas en cuartos en cada uno de los enteros.

En el ítem "el pastel de cumpleaños", que explora la suma implícita de porciones sobre un todo distribuido en doceavos, el nivel de éxito se situó en el 52% (13 alumnos), dado que este subgrupo pudo apoyarse en el conteo de las rebanadas consumidas para determinar el residuo visual de cuatro doceavos, demostrando que la presencia de marcas de partición preestablecidas reduce la demanda cognitiva y facilita el tránsito hacia el *nivel referencial*. No obstante, es imperativo resaltar que para el 48% restante de los estudiantes la resolución de este reparto presentó una complejidad significativa, lo que derivó en registros gráficos inacabados o desprovistos de correspondencia numérica.

El análisis del Bloque 2, enfocado en las magnitudes continuas y las variables de capacidad, área y volumen (ítems 3, 5 y 9), arrojó datos respecto a cómo las y los niños conceptualizan la relación parte-todo desde sus intuiciones cotidianas. En el ítem 3 ("los vasos de

agua"), únicamente el 36% del grupo (9 alumnos) logró representar gráficamente y designar de forma aproximada el nivel de la capacidad ocupada en el recipiente; la mayoría recurrió a expresiones imprecisas, tales como "poquito", "mucho", "algo", o lecturas aditivas erróneas basadas en números enteros de gran escala, confirmando que el volumen de un líquido no se percibe de forma innata como una magnitud matematizable en porciones discretas. Este comportamiento resulta plenamente congruente con el momento formativo del grupo, dado que las estructuras lógicas de las fracciones no habían sido trabajadas de manera formal en el aula, quedando al descubierto la necesidad de construir andamiajes didácticos realistas que transformen la percepción cualitativa del espacio en unidades métricas organizadas

Esta tendencia a la aproximación perceptual se acentúa en el ítem 5 ("portada de colores"), donde los alumnos se enfrentaron a la división de un rectángulo en regiones; si bien el 44% (11 alumnos) demostró una representación visualmente correcta al reconocer que las porciones coloreadas equivalían a la mitad de la superficie, un 48% del grupo realizó particiones incongruentes o no equitativas en franjas asimétricas, anteponiendo la presencia de los tres colores requeridos a la condición geométrica de simetría, lo que invalida la noción de fracción al romper la homogeneidad de las partes.

Por el contrario, el ítem 9 ("rebanadas de pizza", sustracción implícita) obtuvo el mayor índice de logro del bloque con un 64% (16 alumnos), quienes identificaron con precisión la complementariedad del entero, expresando gráficamente la fracción restante mediante el uso de modelos circulares familiares, lo que valida estos contextos como potentes herramientas para la matematización horizontal inicial.

En lo concerniente al Bloque 3, que explora la fracción en conjuntos de magnitudes discretas (ítems 4, 6, 7 y 8), se hizo manifiesta la potencia del pensamiento multiplicativo informal, pero también la rigidez del conteo cardinal. Los ítems 4 ("reparto de chocolates") y 6 ("el grupo de canicas") arrojaron tasas de éxito del 56% y 72% respectivamente; la gran mayoría de los alumnos logró dividir colecciones finitas (24 entre 6 y 18 entre 3) identificando con exactitud la cantidad cardinal correspondiente a cada subcolección.

No obstante, las producciones escritas revelan que los alumnos operan estas situaciones mediante el reparto uno a uno, resolviendo el problema sin llegar a asociar el subconjunto con un operador relacional de la totalidad del numerable. Este hallazgo resulta una evidencia empírica

fundamental: dado que las y los niños todavía no aprendían formalmente las fracciones, estas situaciones de reparto y distribución de conjuntos finitos representan la base intuitiva indispensable sobre la cual la intervención didáctica posterior puede andamiar la construcción del número fraccionario.

El hallazgo más importante de este diagnóstico se localiza en el Bloque 4 (modelos lineales, equivalencias y tiempo), diseñado específicamente para provocar la emergencia del obstáculo del número natural teorizado por Llinares y Sánchez García (1997). En el ítem 12 ("las tortillas"), el cual confrontaba al alumno para determinar si dos cuartas partes ($\frac{2}{4}$) representaban una porción mayor o igual que un medio ($\frac{1}{2}$), se observó un fracaso generalizado: el 68% del grupo (17 alumnos) afirmó que dos cuartas partes eran mayores que un medio.

Al analizar sus argumentos, se evidencia que los niños asumen que la presencia de los numerales dos y cuatro dota automáticamente a la expresión de un valor superior, neutralizando el soporte visual del dibujo y demostrando un sesgo que bloquea la comprensión de la variación inversa del denominador. Esta rigidez se repite en el ítem 11 ("la recta"), donde el 60% de la muestra fue incapaz de proyectar una unidad y media, limitándose a prolongar el salto de la rana de forma abstracta hasta el extremo final de la línea, lo que comprueba que la recta numérica no es significada como un continuo métrico, sino como un carril de conteo de puntos discretos.

Finalmente, el espacio destinado a la sección de exploración de saberes aportó información cualitativa valiosa respecto a la familiaridad del alumnado con la cultura matemática escolar y social. El propósito central de este apartado no residía en exigir la resolución de operaciones abstractas complejas, sino en indagar si las y los niños de tercer grado habían escuchado previamente los nombres de otras fracciones y si las habían manejado o identificado en algún contexto de su vida cotidiana, como las compras familiares o los repartos domésticos. Los resultados muestran que mientras el 100% del grupo reconoce y asocia el vocablo "medio" con la acción física de partir un objeto en dos porciones, solo un 20% (5 alumnos) manifestó haber escuchado o empleado términos vinculados a "cuartos" o "tercios" en escenarios recreativos o comerciales.

El 80% restante exhibió un desconocimiento hacia la nomenclatura formal, recurriendo a duplicaciones del dibujo del medio. Estos datos confirman que, ante la ausencia de un lenguaje

matemático formalizado, las y los niños perciben las fracciones exclusivamente como etiquetas de particiones físicas directas vinculadas al *nivel situacional* de la actividad matemática informal. Este diagnóstico justifica plenamente la pertinencia de la ruta de investigación-acción adoptada, demostrando que cualquier intento por introducir la suma y resta de fracciones debe partir del fortalecimiento de la matematización horizontal y la reinención guiada, utilizando estos saberes informales y aproximaciones contextuales como el único andamio legítimo para el desarrollo del pensamiento fraccionario.

Tabla 10

Sistematización de frecuencias de éxito y porcentajes de logro del instrumento 3

Bloque Analítico	Ítem evaluado	Frecuencia de éxito (f)	Porcentaje de logro (%)
Bloque 1: Reparto y Fraccionamiento	Ítem 1. La pizza (Cociente / Reparto)	10	40%
	Ítem 2. El pastel (Parte-todo / Suma)	13	52%
Bloque 2: Variables Métricas	Ítem 3. Los vasos (Capacidad / Medida)	9	36%
	Ítem 5. Portada (Área / Regiones)	11	44%
	Ítem 9. Pizza Luis (Sustracción implícita)	16	64%
Bloque 3: Conjuntos Discretos	Ítem 4. Chocolates (Reparto conjunto)	14	56%
	Ítem 6. Canicas (Partición conjunto)	18	72%
	Ítem 7. La fila (Operador de arreglos)	12	48%
	Ítem 8. Pelotas (Operador conjunto)	15	60%

Bloque 4: Modelos Formales	Ítem 10. Chocolate (Simetría / Área)	10	40%
	Ítem 11. La recta (Longitud / Medida)	9	36%
	Ítem 12. Tortillas (Equivalencia)	7	28%
	Ítem 13. Videojuego (Operador temporal)	6	24%
	Diálogo Conversacional (Exploratorio)	5	20%

La articulación de los tres instrumentos aplicados al grupo de tercer grado revela información entre la rigidez algorítmica y los obstáculos que condicionan el tránsito del pensamiento del número entero al de los números fraccionarios. Los hallazgos cuantitativos y las producciones cualitativas del grupo, refieren niveles importantes en tareas mecánicas y directas dentro del conjunto de los números naturales, pero presentan dificultades al enfrentar situaciones que exigen flexibilidad, reversibilidad algorítmica y la conceptualización de magnitudes de tipo continuo.

Lo anterior descrito se manifiesta al contrastar los resultados de la dimensión aritmética con los desafíos métrico-relacionales en los tres instrumentos. Mientras que en la prueba estandarizada LEIREM el grupo alcanzó sus índices de logro más elevados en los algoritmos directos de suma y resta icónica —registrando un 76% de éxito en el ítem 16 y un 80% en el ítem 17—, y en el Ejercicio Integrador de Aprendizaje el 44% completó con éxito el registro y conteo icónico elemental de tambos, cubetas y botellas en el ítem 4, inciso a), esta aparente solvencia se desvanece de manera drástica al alterar las restricciones espaciales o relacionales del problema.

Por otro lado, en el instrumento 3, el bloque de conjuntos discretos (ítems 4 y 6) arrojó tasas de éxito del 56% y 72% respectivamente, debido a que las y los niños fueron capaces de operar la distribución y el reparto de colecciones finitas a través de estrategias informales de correspondencia uno a uno, pero sin lograr asociar el subconjunto resultante con un operador relacional que diera cuenta de la totalidad del numerable, lo que demuestra que las competencias

del grupo se sitúan de manera predominante en el *nivel situacional e informal* de la actividad matemática, ancladas en la rigidez del conteo cardinal.

En el Instrumento 1, al alterar el esquema tradicional del algoritmo directo ($a + b = c$) mediante la búsqueda de un complemento algebraico intermedio en el ítem 19 ($72 + 38 + 27 + 23 + __ = 200$), el nivel de éxito descendió al 40%, debido a que el 60% restante del grupo procedió a realizar sumas lineales de los numerales visibles, ignorando el signo de igualdad y la noción de equilibrio de la ecuación.

De acuerdo con el marco de la EMR, este comportamiento confirma que las situaciones de reparto directo en contextos realistas funcionan como potentes catalizadores para la matematización horizontal, pero no logran por sí solas andamiar la emergencia de la matematización vertical ("el modelo para" el razonamiento abstracto) debido a la ausencia de un lenguaje matemático formalizado y de esquemas reversibles que permitan desvincular el conteo físico de la estructura lógica del problema.

El hallazgo más importante de este análisis radica en la persistencia del obstáculo del número natural teorizado por Llinares y Sánchez García (1997), el cual opera de forma transversal y predictiva a lo largo de los tres instrumentos diagnósticos, obstaculizando la comprensión de la variación inversa. Este sesgo se hace explícito inicialmente en el ítem 10 del Instrumento 1, donde solo el 32% del grupo logró resolver una relación de proporcionalidad inversa en unidades de capacidad, mientras que un 68% de los alumnos vinculó de forma mecánica un numeral más alto con una magnitud físicamente mayor, asumiendo de manera errónea que diez unidades de medida implican un volumen superior al de cinco unidades.

Esta rigidez se presenta de forma idéntica con las respuestas argumentativas del ítem 4, inciso b), del Instrumento 2, en el cual un 64% de la muestra afirmó verbalmente que un personaje poseía más agua que otro bajo la única premisa visual de que "tenía muchas botellas", demostrando la dificultad de la mayoría del alumnado para desconectar el conteo cardinal directo de piezas individuales del valor posicional del contenedor mayor (el tambo o la cubeta). La consecuencia directa de este sesgo se observa en el Bloque 4 del Instrumento 3 (ítems 11 y 12), diseñado para evaluar equivalencias. En el ítem 12 ("las tortillas"), el grupo registra un 28% de logro, debido a que el 68% de los estudiantes afirmó de manera categórica que dos cuartas partes

$(\frac{2}{4})$ representaban una porción mayor que un medio $(\frac{1}{2})$, justificando explícitamente que la presencia de los numerales dos y cuatro dotaba automáticamente a la expresión de un valor superior.

Este comportamiento anula el soporte visual y geométrico de la tarea y confirma que el alumno, ante la insuficiencia del número natural para conceptualizar la fragmentación métrica, extrapola las reglas de orden del pensamiento entero hacia el terreno de los números fraccionarios, asumiendo que un denominador más grande genera intrínsecamente una fracción de mayor tamaño. La correlación entre el 68% de error por sesgo lineal en el ítem 10 del Instrumento 1, el 64% de respuestas intuitivas en el Instrumento 2 y el 68% de afirmaciones erróneas en el ítem 12 del Instrumento 3, ofrece una evidencia empírica de las dificultades del grupo.

Finalmente, la dimensión métrica de magnitudes continuas y la exploración de saberes sociales corroboran que el volumen y el espacio continuo no son percibidos por el alumnado de forma innata como entidades matematizables, legitimando la intervención didáctica diseñada. En el ítem 11 del Instrumento 1, el 52% del grupo falló al estimar la capacidad del litro continuo al guiarse por la altura perceptual de los contenedores, comportamiento que converge con el ítem 3 del instrumento 3 ("Los vasos de agua"), donde solo el 36% logró aproximar el nivel fraccionario de una jarra, recurriendo el resto a estimaciones imprecisas, y con el ítem 5 del mismo instrumento, donde el 48% realizó particiones asimétricas e incongruentes en una superficie, anteponiendo la presencia de los colores a la condición geométrica de equidad y rompiendo con ello la homogeneidad de las partes.

Esta carencia de esquemas relacionales se complementa con el diagnóstico de la sección exploratoria de saberes mediante el diálogo conversacional, la cual develó que, aunque el 100% de los alumnos asocian intuitivamente el vocablo "medio" con la acción física de partir, un 80% presenta dificultades asociadas a la nomenclatura formal de "tercios" o "cuartos".

El análisis de estos tres instrumentos diagnósticos demuestra que el grupo ingresa al ciclo escolar con un pensamiento entero funcional para tareas mecánicas unilaterales, pero desprovisto de las nociones de variación inversa, conservación de la magnitud y reversibilidad operativa necesarias para la transición hacia el número fraccionario. Este panorama justifica la pertinencia

de la ruta de investigación-acción adoptada, evidenciando que cualquier intento por introducir la suma y resta de fracciones en este contexto escolarizado debe rechazar la enseñanza abstracta del algoritmo formal y partir, obligatoriamente, del fortalecimiento de la matematización horizontal y la reinención guiada a través de andamiajes realistas.

Análisis y Resultados de la Intervención Docente Basada en la EMR

A partir de los resultados diagnósticos se diseñó una secuencia de intervención fundamentada en los principios de la EMR, dicha intervención se estructuró en once situaciones problemáticas organizadas de manera progresiva, las cuales se detallan en el Anexo D: Secuencia Didáctica. Las primeras actividades se orientaron a la construcción de la unidad de referencia mediante magnitudes lineales y procesos de partición. Posteriormente, se introdujeron tareas de medición, comparación y estimación utilizando tiras fraccionarias como modelos concretos de apoyo. Finalmente, las actividades abordaron la suma, la resta, las equivalencias y las fracciones impropias como oportunidades para favorecer procesos de formalización matemática.

La progresión didáctica se organizó en cuatro etapas analíticas que permiten registrar cómo los alumnos avanzan desde la práctica con materiales reales hasta el uso de operaciones escritas.

La primera etapa se centra en el *Nivel Situacional*, donde emerge el concepto de magnitud y los alumnos emplean sus primeras estrategias intuitivas. En esta fase se analiza la actividad matemática que depende por completo del contexto del aula, donde los estudiantes organizan los problemas de su entorno utilizando recursos informales y su lenguaje cotidiano. Este momento se fundamenta en los datos de la Sesión 1, llamada *El laboratorio de las medidas perdidas*, donde construyen una unidad de referencia doblando listones de papel y experimentaron con ellas para buscar la medida de un objeto, y de la Sesión 2, titulada *El misterio de las medidas perdidas*, que introduce la unión libre de tiras de diferentes tamaños.

El análisis de estas sesiones se enfoca en observar cómo los alumnos pasan de percibir el listón como un "todo" a la necesidad de doblarlo para obtener partes iguales como medios, cuartos y octavos. También se examina cómo justifican que una tira doblada es "la mitad" sin usar reglas ni metros, apoyándose solo en la comprobación física al ver que las tiras coinciden exactamente. Finalmente, se documenta el conflicto que viven al notar que no pueden contar

simplemente las piezas (por ejemplo, decir "tengo 3 pedazos") si las tiras son de distinto color, ya que sus tamaños no son iguales y la diferencia impide hacer una suma directa.

En la segunda etapa se establece el *Nivel Referencial*, que se caracteriza por la aparición de modelos y representaciones gráficas. Aquí se documenta el cambio cuando los dibujos y materiales de los alumnos dejan de ser solo un objeto físico y se convierten en "modelos de" las relaciones matemáticas. Este momento analiza los resultados de la sesión 3, *El desafío de la medida faltante*, donde usan las tiras para sumar un medio y un cuarto; la sesión 4, *La disputa por el terreno*, donde emplean la cuadrícula rectangular para analizar áreas; y la Sesión 5, *El misterio de la medida y el espacio sobrante*, que aborda el ajuste de espacios con partes más pequeñas.

La categoría analítica es el tránsito del esquema gráfico al descubrimiento de regularidades fraccionarias. El análisis busca identificar cómo la equivalencia surge como una necesidad real en el aula: los alumnos se ven obligados a encimar o cambiar piezas grandes por porciones más chicas (como cambiar una tira de un medio por dos de un cuarto) para poder medir y expresar que tienen tres cuartos en total. Este ejercicio ayuda a superar el error común de sumar directamente numeradores y denominadores. Además, se revisa el trabajo con terrenos rectangulares en la Sesión 4, observando cómo comparar una parte de cuatro octavos con una de dos cuartos les permite comprobar que el área es la misma, rompiendo con la idea equivocada de que a números más grandes corresponden pedazos de mayor tamaño.

La tercera etapa corresponde al *Nivel General*, el cual marca un acercamiento importante a la transición hacia la abstracción. En esta fase, los modelos gráficos y concretos se empiezan a interiorizar y se transforman en "modelos para" pensar de forma matemática. Los alumnos ya pueden anticipar resultados, encontrar reglas numéricas y realizar operaciones sin depender de la manipulación directa de los materiales. Las actividades analizadas son la sesión 6, *El camino largo de la hormiga*, que rompe la barrera del entero; la sesión 7, *El desafío de las longitudes variadas*, que trabaja el uso flexible de fracciones equivalentes; la sesión 9, *El desafío de las medidas en el aula*, basada en la medición de objetos grandes; y la sesión 10, *El misterio de los envases y las metas de capacidad*, que lleva lo aprendido hacia la magnitud de capacidad.

El énfasis es la flexibilidad del pensamiento relacional y la descontextualización de la magnitud lineal. El análisis cualitativo revisa cómo manejan el sobrante que pasa de un entero, es decir, cómo comprenden que una longitud mayor a un metro se puede registrar como una fracción impropia (cinco cuartos) o como una fracción mixta (un metro y un cuarto), entendiendo que el residuo forma parte de un segundo listón. También se analiza la reflexión teórica en la sesión 9, donde el alumno registra una medida física y luego, de manera mental, deduce una combinación equivalente sin necesidad de volver a medir el objeto. Por último, se examina la transferencia a la capacidad en la sesión 10, evaluando cómo aplican las sumas de las tiras de papel al uso de recipientes con agua, lo que los lleva a descubrir que a vasos más pequeños se necesitan más vaciados y que la cantidad de líquido no cambia, aunque cambie la forma del envase.

Finalmente, la cuarta etapa de análisis atiende al *Nivel Formal*, donde se documenta el acercamiento a los procesos de abstracción a través de las sesiones 8, *El desafío del exceso y la medida de ajuste*, y 11, *El misterio del residuo en la jarra*, centradas en la sustracción de partes heterogéneas. La categoría analítica es la coherencia operativa simbólica y la justificación matemática. El análisis da cuenta de cómo los alumnos logran igualar los denominadores de manera numérica sin necesidad de hacer dibujos, transformando fracciones mixtas a su forma impropia para poder restar formalmente. Asimismo, se analizan los argumentos de los alumnos para explicar por qué es un error restar directamente los números de *arriba* y los de *abajo*.

Es fundamental precisar que, al analizar este tránsito bajo la naturaleza cognitiva e institucional de un tercer grado de educación primaria, el resultado final de este proceso no radica en la ejecución mecánica del algoritmo simbólico convencional o la regla formal abstracta de la suma y resta de fracciones. El verdadero interés del análisis de esta intervención es la emergencia, consolidación y uso consciente de las relaciones matemáticas de equivalencia. Lo que los estudiantes han internalizado, no es una fórmula rígida, sino la capacidad de realizar descomposiciones múltiples, buscar subunidades homogéneas de ajuste y coordinar representaciones lineales, bidimensionales y volumétricas para dotar de sentido a la combinación de magnitudes heterogéneas.

Nivel Situacional: Uso de Estrategias Intuitivas (Sesiones 1 y 2)

El primer estadio en la trayectoria de aprendizaje propuesta por la EMR corresponde al nivel situacional. En este espacio, las actividades matemáticas se encuentran vinculadas a un contexto de la realidad concreta de los alumnos, donde las estrategias de resolución emergen de forma intuitiva a partir de la manipulación directa de materiales y el uso de un lenguaje coloquial-contextual (Gravemeijer, 1999).

Para este análisis, el nivel situacional se pone de manifiesto durante la intervención de las sesiones 1 ("*El laboratorio de medidas*") y 2 ("*El misterio de las medidas perdidas*"). En ambas intervenciones, la regla y el algoritmo numérico convencional fueron intencionalmente sustituidos por un modelo de magnitudes lineales: listones de papel de diversos colores que operan como herramientas de medición no convencionales. El propósito fundamental de este bloque radicó en promover que los estudiantes identificaran la unidad de referencia y experimentaran la necesidad aditiva al unir diferentes longitudes, sentando las bases de la matematización horizontal.

Para evaluar el desempeño y las conceptualizaciones de los alumnos durante este primer acercamiento, se estructuraron cuatro indicadores de análisis que describen el tránsito desde la partición física autónoma hasta la justificación de la naturaleza aditiva de la longitud. La Tabla 11 condensa las frecuencias y los porcentajes calculados respecto al total de los alumnos participantes (en esta sesión asistieron 25).

Tabla 11

Evidencias del nivel situacional en magnitudes lineales (Sesiones 1 y 2)

Indicadores de Análisis	Descripción del comportamiento observado	Frecuencia (f)	Porcentaje (%)
Construcción procedimental de la unidad	Fraccionamiento físico autónomo (plegado/corte) logrando partes congruentes y asignación correcta de la nomenclatura fraccionaria básica.	14	56.00%

Estimación y combinación de magnitudes lineales	Uso empírico y manipulación simultánea de listones de colores para determinar la longitud exacta de objetos del aula mediante la iteración visual.	6	24.00%
Composición de magnitudes y construcción de explicaciones contextualizadas	Representación gráfica o física de la unión de dos longitudes continuas (extremo a extremo) manifestando la noción de adición espacial.	13	52.00%
Emergencia del lenguaje coloquial-contextual	Justificación verbal ante la imposibilidad de sumar pedazos heterogéneos como números naturales, apelando a la disparidad de tamaños físicos.	6	24.00%

Los resultados obtenidos muestran que el 56.00 % de los estudiantes ($f=14$) logró construir de manera autónoma particiones equivalentes a través del plegado de los listones, identificando relaciones básicas entre la unidad y algunas fracciones unitarias. Este hallazgo sugiere que más de la mitad del grupo consiguió establecer correspondencias entre la acción física de dividir una magnitud continua y su representación fraccionaria. Sin embargo, cuando la actividad demandó explicar o justificar verbalmente las relaciones construidas, el porcentaje disminuyó al 24.00 % ($f=6$), lo que evidencia que la comprensión derivada de la manipulación concreta aún no se traducía plenamente en argumentos matemáticos explícitos. Desde la perspectiva de Freudenthal (1983), este comportamiento es característico de las primeras fases de la reinención guiada, donde las acciones preceden a la formalización conceptual y el significado emerge inicialmente de la experiencia sobre los objetos.

Durante la primera sesión, los estudiantes se enfrentaron a la tarea de construir fracciones mediante el plegado de listones sin recurrir a instrumentos de medición convencionales. Esta situación permitió que los alumnos exploraran de manera directa las relaciones de partición y equivalencia presentes en una magnitud continua. Un ejemplo de esta exploración se dio en la

interacción entre la docente en formación y el alumno Sebastián, quien recurrió al plegado de los listones para hallar la mitad de la unidad:

DF: ¿Dónde está la mitad?

Sebastián: En silencio señala un espacio a la mitad del listón

DF: Comprueba que ahí es la mitad.

Sebastián: Es aquí maestra (dobla el listón y muestra el doblez)

DF: ¿Por qué?

Sebastián: Porque lo doblé a la mitad maestra.

Las producciones de algunos participantes evidenciaron una organización progresiva de las particiones obtenidas, estableciendo relaciones entre la cantidad de partes generadas y su denominación fraccionaria correspondiente. En este sentido, Aranza y Keyler manifestaron un control procedimental del número de segmentos creados:

DF: ¿Cuántos listones llevamos?

Aranza: Llevo ocho acá, cuatro acá, dos acá y el plateado (mientras señala los listones correspondientes)

DF: De forma similar lo está haciendo Keyler, está demostrando que, si sumamos las tiras de un mismo color, obtenemos nuevamente el metro. Bien Keyler, ¿en cuál vas?

Keyler: En los octavos. Ya no me faltan las tiritas.

DF: Están comprobando que, efectivamente, la suma de los listones de un mismo color es igual a un metro. ¿Sí les está dando?

Aranza: A mí sí me está dando un metro con todos los listones.

Keyler: A mí también, maestra.

Jesús: Sí, a mí también.

Estas respuestas sugieren que los estudiantes comenzaron a reconocer que una misma unidad puede reorganizarse en diferentes particiones conservando su longitud total, aspecto que constituye uno de los fundamentos de la comprensión de la fracción como medida.

No obstante, también se identificaron producciones en las que la asignación de valores fraccionarios no guardó correspondencia con el tamaño real de las particiones realizadas. En estos casos, los estudiantes parecían apoyarse en asociaciones intuitivas o en conocimientos

previamente memorizados, sin establecer aún una relación consistente entre la acción de dividir la unidad y la magnitud resultante. Este conflicto cognitivo emergió claramente durante el llenado de los registros escritos de la sesión 1:

DF: ¿Cuál es la medida que están buscando?

Esteban y Jesús: La del largo del salón.

Díganme, ¿Y cuánto midió?

Jesús: Ocho metros.

Esteban: Ocho metros.

DF: ¿Sobró algo?

Esteban: Si, pero no se ajustó con el metro.

EF: ¿Y qué pasó con las partes que eran fracciones? ¿Puedes usar esas?

Esteban: Si, pusimos la mitad de un gris y tres azules.

DF: ¿Y cuál es esa medida en fracciones?

Edgar: Ocho punto ocho metros.

Esteban: No, ocho octavos. Ocho octavos.

DF: A ver, muéstrenme los octavos que usaron para medir. Acuérdense de que tenían tres azules y uno gris doblado a la mitad. Enséñenmelos. ¿Qué medida es?

(Esteban cambia el listón de $\frac{1}{2}$ por 7 listones de $\frac{1}{8}$)

Esteban: Si cambiamos el blanco ($\frac{1}{2}$) con los rosas son 7.

DF: Son 7, pero ¿De qué medida?

Esteban: de $\frac{1}{8}$.

DF: Pero ¿Cómo se llama esa medida? ¿Cómo se llaman esos 7 de $\frac{1}{8}$?

Esteban: No sé maestra, no me acuerdo

Tales producciones reflejan la coexistencia de distintos niveles de comprensión dentro del grupo y evidencian que algunos alumnos aún se encontraban construyendo la noción de unidad de referencia, considerada por Llinares y Sánchez (1997) como un elemento central para el aprendizaje posterior de las fracciones.

De manera particular, algunas respuestas mostraron la permanencia de representaciones asociadas al modelo parte-todo tradicional. Al intentar interpretar los listones mediante esquemas circulares o dibujos de sectores, ciertos estudiantes trasladaron conocimientos previamente adquiridos a un contexto de medición lineal. Más que representar un error conceptual aislado, esta situación puede interpretarse como la utilización de modelos familiares para enfrentar una tarea nueva. Desde la perspectiva de Gravemeijer (1999), este tipo de respuestas constituye una evidencia relevante de los procesos de modelización inicial, pues permite identificar los referentes desde los cuales los estudiantes intentan construir significado antes de desarrollar modelos más adecuados para el razonamiento matemático.

En la actividad orientada a la medición de objetos del entorno, algunos estudiantes comenzaron a utilizar las fracciones construidas como herramientas para cuantificar magnitudes reales. Aunque las denominaciones utilizadas no siempre fueron precisas, las acciones desarrolladas evidenciaron intentos por combinar distintas unidades fraccionarias para representar una misma longitud. Estas estrategias constituyen manifestaciones tempranas de matematización horizontal, ya que los estudiantes empezaron a organizar y describir situaciones del entorno mediante relaciones matemáticas derivadas de su experiencia concreta con los materiales.

Por otra parte, los registros obtenidos durante las actividades de suma de longitudes muestran que la mayor parte del grupo logró representar gráficamente la unión de magnitudes continuas mediante la concatenación de listones. Esta acción permitió que los estudiantes asociaran la suma con la construcción de una nueva longitud, favoreciendo una comprensión inicial de la suma de fracciones como una composición de medidas y no únicamente como una operación numérica descontextualizada. De acuerdo con Freudenthal (1983), este tipo de experiencias resulta fundamental para que las operaciones matemáticas emerjan de situaciones con sentido antes de ser formalizadas mediante algoritmos convencionales.

Las explicaciones verbales proporcionadas por los estudiantes también ofrecen indicios relevantes sobre la evolución de sus razonamientos. Expresiones como “porque unos son más grandes que otros” o “primero hay que ver cuánto miden” muestran que los alumnos comenzaron a reconocer que no todas las partes poseen la misma magnitud y que, por lo tanto, no pueden ser

tratadas como unidades equivalentes. Aunque estas argumentaciones aún se encuentran alejadas del lenguaje matemático formal, representan avances significativos dentro del nivel situacional. Van den Heuvel-Panhuizen (2003) señala que el lenguaje contextual constituye un recurso legítimo en las etapas iniciales de aprendizaje, ya que permite a los estudiantes expresar relaciones matemáticas emergentes antes de apropiarse de una terminología especializada.

Finalmente, los resultados obtenidos en las sesiones 1 y 2 sugieren que las experiencias de manipulación y medición favorecieron la construcción de significados asociados a la unidad de referencia, la partición y la composición de magnitudes. Si bien la mayoría de los estudiantes aún dependía de apoyos materiales y contextuales para justificar sus respuestas, comenzaron a emerger indicios de modelización que preparan el tránsito hacia el nivel referencial. En términos de la EMR, estas evidencias muestran que los estudiantes iniciaron un proceso de transformación progresiva de sus acciones concretas en representaciones cada vez más organizadas, condición necesaria para avanzar posteriormente hacia formas más estructuradas de razonamiento matemático.

Estimación y Combinación de Magnitudes Lineales

La transición hacia la matematización horizontal implica que los estudiantes comiencen a utilizar las particiones construidas previamente como herramientas para interpretar y cuantificar situaciones del entorno. En la actividad orientada a la medición de objetos del aula mediante la combinación de listones fraccionarios, el 24.00 % de los estudiantes ($f=6$) puso en práctica estrategias de iteración, comparación y composición de magnitudes. Este resultado muestra que, aunque la mayoría del grupo aún dependía de procedimientos de exploración inicial, algunos alumnos comenzaron a utilizar las fracciones como recursos para estimar y expresar medidas de manera contextualizada.

Las producciones analizadas permiten observar que los estudiantes recurrieron a la combinación de diferentes unidades fraccionarias para representar una misma longitud. Por ejemplo, Sebastián registró la medida del pizarrón mediante la expresión: “pizarrón, use 1 m y 3 doceavos, 1 azul y 3 rojos, 1 metro y 3 cuartos”. Esta respuesta evidencia un intento por articular la unidad de referencia con las fracciones obtenidas a través de la manipulación de los materiales.

Aunque se observan imprecisiones en la denominación de la fracción utilizada, la estrategia desarrollada revela que el estudiante comenzó a concebir una longitud como el resultado de la combinación de distintas partes de una misma unidad. Desde la perspectiva de la EMR, este tipo de producciones resulta relevante porque muestra cómo las acciones realizadas sobre los materiales comienzan a transformarse en descripciones matemáticas que permiten organizar la realidad (Gravemeijer, 1999).

De manera similar, Jesús registró la longitud del mismo objeto mediante la expresión: “pizarrón, 1 azul, 3 rojos, primero, doceavo, doceavo, doceavo”. Aunque la nomenclatura empleada aún no corresponde completamente a las convenciones matemáticas esperadas, la estrategia utilizada muestra que el estudiante reconoció la necesidad de combinar diferentes segmentos para cubrir la totalidad de la longitud medida. Esta acción sugiere que la comprensión de la medida se encontraba estrechamente vinculada a la experiencia concreta de colocar sucesivamente los listones sobre el objeto, procedimiento característico de los primeros niveles de matematización horizontal.

Las evidencias obtenidas permiten identificar que las estrategias de resolución se apoyaron principalmente en la acción física de comparar, superponer y concatenar magnitudes. En este momento de la intervención, los estudiantes aún no recurrían a procedimientos simbólicos o algoritmos formales; en cambio, utilizaban los materiales como herramientas para construir significados relacionados con la medición y la composición de longitudes. De acuerdo con Freudenthal (1983), este tipo de experiencias constituye una condición necesaria para que los conocimientos matemáticos emerjan de situaciones con sentido antes de ser formalizados.

En conjunto, los resultados sugieren que algunos estudiantes comenzaron a reconocer que una misma magnitud puede expresarse mediante diferentes combinaciones de unidades y fracciones. Aunque las representaciones empleadas todavía muestran vacilaciones en el uso del lenguaje matemático convencional, las acciones desarrolladas evidencian avances en la construcción de relaciones entre la unidad de referencia y sus particiones. Estos hallazgos indican que el grupo empezó a utilizar las fracciones como instrumentos para describir y cuantificar fenómenos del entorno, sentando las bases para la construcción posterior de modelos más estructurados en el nivel referencial.

Composición de Magnitudes y Construcción de Explicaciones Contextualizadas

La segunda sesión permitió profundizar en la comprensión de la suma de magnitudes mediante la unión física de longitudes representadas por los listones. Desde la perspectiva de la EMR, esta actividad favoreció que los estudiantes atribuyeran significado a la operación de suma a partir de una experiencia concreta de medición y composición de longitudes. La acción de colocar dos segmentos de manera consecutiva sobre una misma línea constituyó una representación inicial de la suma como combinación de magnitudes continuas, antes de su formalización mediante expresiones numéricas.

Los resultados muestran que el 52.00 % de los estudiantes ($f=13$) logró representar gráficamente la unión de dos longitudes mediante esquemas lineales continuos y proporcionales. Estas producciones evidencian que una parte importante del grupo comenzó a establecer relaciones entre las acciones realizadas con los materiales y las representaciones gráficas construidas en sus registros, aspecto que Gravemeijer (1999) identifica como una característica del tránsito entre la experiencia concreta y la construcción de modelos referenciales.

Un hallazgo particularmente relevante surgió al solicitar a los estudiantes que explicaran por qué no era posible considerar simplemente que la unión de dos fracciones distintas representaba “dos pedazos”. Las respuestas obtenidas muestran que los alumnos comenzaron a reconocer diferencias entre las magnitudes involucradas, aun cuando todavía no disponían del lenguaje matemático formal para expresar dichas relaciones.

Sebastián y Aranza señalaron que no era posible realizar esa afirmación “porque unos son más grandes que otros”. Por su parte, Aurora amplió esta idea al mencionar que “primero hay que ver cuánto miden”, mientras que Esteban explicó que “tiene que ser la medida una mitad del metro y un listón rojo”. Aunque estas expresiones se encuentran formuladas desde un lenguaje cotidiano, evidencian que los estudiantes empezaban a considerar el tamaño de las unidades como un elemento relevante para establecer comparaciones y realizar composiciones de magnitudes.

Desde la perspectiva de Van den Heuvel-Panhuizen (2003), este tipo de verbalizaciones constituye una manifestación del lenguaje contextual que caracteriza los primeros niveles de

matematización. Los estudiantes aún no expresan formalmente que las fracciones representan unidades de medida diferentes ni que es necesario establecer relaciones de equivalencia para operar con ellas; sin embargo, reconocen intuitivamente que la diferencia de tamaños impide tratarlas como cantidades idénticas. En este sentido, las explicaciones producidas muestran indicios de una comprensión emergente acerca de la necesidad de considerar la unidad de referencia al comparar o combinar fracciones.

Asimismo, algunas producciones comenzaron a evidenciar aproximaciones iniciales hacia la construcción de relaciones de equivalencia. Esteban registró expresiones como “medio metro $\frac{1}{2}$ y un cuarto $\frac{1}{4}$ (...) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ”, intentando establecer conexiones entre diferentes particiones de una misma unidad. Aunque la representación aún no alcanzaba niveles de formalización matemática, la producción sugiere que el estudiante empezó a reconocer relaciones entre distintos submúltiplos de la unidad de referencia.

De manera complementaria, Jesús utilizó la superposición física de los listones para comprobar que dos segmentos de medio metro coincidían exactamente con la longitud del listón de un metro. Al explicar que “mi listón de 1 m es igual a 2 listones de medio metro”, el estudiante logró establecer una relación explícita entre la unidad y una de sus particiones equivalentes. Esta acción constituye una evidencia relevante de cómo la manipulación de materiales puede favorecer la construcción de significados asociados a la equivalencia de fracciones, principio fundamental para el desarrollo posterior de estrategias de suma y resta.

En conjunto, las evidencias obtenidas durante esta fase muestran que los estudiantes comenzaron a reconocer la importancia de la unidad de referencia, las diferencias entre magnitudes y algunas relaciones de equivalencia construidas a partir de la experiencia concreta. Aunque la mayoría de las explicaciones permanecieron vinculadas al contexto y a las propiedades perceptibles de los materiales, estas producciones representan avances significativos dentro del nivel situacional, pues constituyen la base sobre la cual podrán construirse posteriormente representaciones más estructuradas y formas de razonamiento matemático progresivamente formalizadas.

Síntesis del Tránsito hacia el Nivel Referencial

El análisis integrado de las sesiones 1 y 2 permite identificar que el nivel situacional cumplió una función relevante en la construcción de significados asociados a la unidad de referencia, la partición y la composición de magnitudes. La utilización de listones como recurso de medición favoreció que los estudiantes exploraran relaciones entre las partes y el todo a partir de experiencias concretas de manipulación, comparación y superposición. Estas acciones posibilitaron que los alumnos construyeran explicaciones iniciales acerca de las fracciones desde contextos con significado, condición que Freudenthal (1983) considera fundamental para el desarrollo progresivo del pensamiento matemático.

Las actividades propuestas promovieron que los estudiantes confrontaran diferentes tamaños de unidades y reconocieran la necesidad de establecer relaciones entre ellas para describir con mayor precisión las magnitudes observadas. La interacción con materiales concretos permitió que algunos alumnos comenzaran a identificar que las partes no pueden considerarse equivalentes únicamente por su cantidad, sino que es necesario atender a la medida que representan dentro de una unidad de referencia común. Este proceso favoreció la emergencia de razonamientos vinculados con la comparación de magnitudes y la construcción inicial de relaciones de equivalencia.

Desde la perspectiva de la EMR, estas producciones reflejan procesos característicos de la matematización horizontal, en los que los estudiantes organizan y describen situaciones de la realidad mediante estrategias apoyadas en recursos concretos y representaciones informales (Treffers, 1987). Asimismo, la aparición de relaciones de equivalencia construidas a través de la superposición de listones y la comparación de longitudes sugiere el inicio de una transición hacia formas de representación más estructuradas.

En consecuencia, las experiencias desarrolladas durante este primer momento de la intervención permitieron establecer las bases para avanzar hacia el nivel referencial. Los significados construidos a partir de la manipulación de magnitudes y del lenguaje contextual comenzaron a transformarse en representaciones que trascienden la situación específica de medición, favoreciendo la emergencia de modelos que posteriormente podrán funcionar como herramientas para el razonamiento matemático, tal como lo plantean Gravemeijer (1999) y Van den Heuvel-Panhuizen (2003).

Nivel Referencial: La Construcción de Modelos Para Representar Relaciones Entre Magnitudes

En este segundo momento del análisis se examina la evolución de las producciones estudiantiles desde la manipulación directa de materiales hacia la construcción de representaciones gráficas y esquemáticas que comienzan a funcionar como soportes para el razonamiento matemático. De acuerdo con Gravemeijer (1999), el nivel referencial se caracteriza por la aparición de modelos que, aunque aún conservan elementos de la situación que les dio origen, permiten a los estudiantes representar, organizar y comunicar relaciones matemáticas de manera progresivamente más estructurada.

Desde esta perspectiva, las tiras de papel utilizadas durante las sesiones iniciales dejan de constituir únicamente recursos materiales de medición para convertirse gradualmente en referentes que permiten representar relaciones de equivalencia, composición de magnitudes y operaciones con fracciones. Este tránsito resulta relevante porque marca el paso de una matematización centrada en la acción concreta hacia formas de representación que favorecen la organización del pensamiento matemático.

Sesión 3: Representación y Organización de Magnitudes Fraccionarias en Contextos de Medición

La tercera sesión tuvo como propósito favorecer la construcción de relaciones entre magnitudes fraccionarias mediante la representación y combinación de longitudes asociadas a las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$. A través de la situación problemática “*El desafío de la medida faltante*”, se buscó que los estudiantes analizaran diferentes formas de representar una misma longitud y reflexionaran sobre las relaciones existentes entre las partes que integran una unidad de referencia.

La actividad planteó un escenario en el que los alumnos debían combinar magnitudes de distinta partición para determinar la longitud total de una estructura. Esta situación permitió explorar cómo los estudiantes utilizaban los modelos contruidos previamente para representar la suma de fracciones y establecer relaciones entre distintas formas de expresar una misma cantidad.

Los resultados muestran que únicamente el 24.0 % de los estudiantes logró construir representaciones lineales continuas y proporcionales de las magnitudes involucradas. Este hallazgo sugiere que una parte reducida del grupo comenzó a utilizar representaciones gráficas como herramientas para organizar las relaciones entre las fracciones, mientras que la mayoría aún dependía de apoyos concretos o presentaba dificultades para trasladar dichas relaciones a registros gráficos más estructurados.

Asimismo, se identificó que cerca de la mitad de los estudiantes no realizó ningún registro gráfico en la actividad. Este resultado puede interpretarse como un indicador de que el tránsito entre la experiencia concreta y la representación matemática aún se encontraba en proceso de construcción. Desde la perspectiva de la EMR, esta situación es esperable, ya que la emergencia de modelos no ocurre de manera inmediata, sino como resultado de múltiples experiencias de interacción con situaciones problemáticas significativas (Freudenthal, 1983).

En relación con la argumentación, las respuestas obtenidas muestran distintos niveles de comprensión sobre la combinación de magnitudes fraccionarias. Algunos estudiantes comenzaron a justificar sus respuestas mediante comparaciones visuales o relaciones de equivalencia construidas a partir de los materiales utilizados durante las sesiones previas. Un indicio de esto emergió en la interacción mediada por la docente en formación cuando intentaron consolidar la equivalencia del listón de un listón para sumarlo a otro listón de diferente tamaño:

DF: Tenemos un listón rojo y uno blanco ¿De qué medida es el listón blanco?

Keyler: de un cuarto, Ah, no maestra, de dos cuartos.

Sebas: Dos cuartos maestra.

Ashly: Es de medio metro maestra.

DF: Exactamente, el blanco equivale a dos cuartos. Ya me dieron una pista de la respuesta. (listón blanco $\frac{1}{2}$ y listón rojo $\frac{1}{4}$).

Estas explicaciones constituyen evidencias de que ciertos alumnos empezaban a utilizar los modelos desarrollados en el nivel situacional como referentes para interpretar nuevas situaciones matemáticas. Incluso al aproximarse a la resolución gráfica y perceptiva, la combinación secuencial de las tiras propició aproximaciones directas en el diálogo colectivo:

DF: (coloca un listón blanco y uno rojo consecutivamente en el pizarrón.)

DF: Tenemos el blanco y después el rojo. ¿Cuál es la medida total desde esta orilla hasta esta otra? (señala el extremo izquierdo del listón blanco y el extremo derecho del listón rojo)

Esteban y Ashly: Tres cuartos (de forma unánime).

Sebas: Medio metro.

DF: Muy buenas aportaciones...están cerca de la respuesta. Utilicen las otras medidas que tienen para comprobarlo.

Por otro lado, también se identificaron respuestas centradas exclusivamente en la descripción de acciones o en afirmaciones generales acerca del procedimiento realizado. Así como interpretaciones que entraban en conflicto con la nomenclatura fraccionaria convencional. Al plantear la adición de las piezas, surgieron respuestas como la de Geraldine:

DF: Si sumamos un medio y un cuarto, ¿cuánto sería?

Geraldine: Un medio cuarto.

DF: Si me dices "un medio cuarto", yo entiendo esto (doblando el listón de $\frac{1}{4}$ a la mitad), y esa no es la medida que tenemos aquí. Entonces, ¿cuánto sería?

Jesús: Eso es un octavo, Geraldine.

Maestra: Cierto, la mitad de un cuarto es un octavo. Pero, entonces, volviendo al tema ¿cuánto será la suma de $\frac{1}{2}$ de listón y $\frac{1}{4}$?

Esteban y Keyler: Son $\frac{3}{4}$.

De manera similar, se observó la persistencia de errores vinculados a la suma lineal de los valores nominales o a la falta de anclaje en la unidad de referencia, como cuando Esteban propuso un resultado ajeno a las particiones disponibles:

Esteban: Un sexto.

DF: ¿Un sexto? Un sexto sería una parte de seis. ¿Tenemos partes de seis?

Esteban: Mmm, no sé maestra.

DF: A ver, te doy este listón (le entrega un listón de 1 metro), pártelo en seis partes y compruébame que efectivamente es un sexto.

Esteban: (corta los listones y los compara) No, no es la misma medida.

DF: (Anota la suma en el pizarrón) si estamos sumando la fracción un medio más un cuarto ¿Cuánto es?

Aurora: Son dos sextos.

DF: ¿Por qué?

Aurora: Porque uno más uno son dos (numeradores) y dos más 4 son 6 (denominadores).

DF: A ver, compruébalo.

Aurora y Jesús: No maestra, no da.

DF: ¿Entonces cuánto es?

Aurora y Jesús: No sé

Este tipo de producciones sugiere que, aunque los estudiantes lograban participar en la actividad y obtener ciertos resultados, aun cuando no siempre conseguían explicitar las relaciones matemáticas que sustentaban sus decisiones. En consecuencia, las representaciones continuaban funcionando principalmente como apoyos vinculados al contexto, más que como herramientas autónomas de razonamiento. La dificultad para independizar el modelo de la partición concreta se hizo evidente en los esfuerzos finales por institucionalizar el nombre de la fracción resultante ($\frac{3}{4}$), donde la cantidad de partes visibles distorsionaba la designación de la unidad:

DF: Ya lo tienen. Sólo necesito que me digan el nombre.

Keyler: Un tercio.

DF: ¿Por qué un tercio?

Sebastián: Porque aquí son tres (se para de su lugar y señala en el pizarrón los tres listones rojos acomodados de manera continua).

DF: Sí, pero esas tres partes (señala los listones en el pizarrón.), ¿de qué tamaño son?

Dulce: Del rojo.

DF: ¿Y cómo se llama el rojo?

Dulce: Un cuarto.

DF: Entonces, si tenemos tres partes de un cuarto, ¿cuánto es?

Aranza: Tres de un cuarto.

DF: ¿Cuántas partes tenemos?

Alumnos: Tres.

DF: ¿Y cuántas partes iguales forman el metro completo?

Alumnos: Cuatro.

DF: Entonces, ¿qué fracción tenemos?

María José: Un tercio.

Ashly: No, serían $\frac{3}{4}$, porque la media es de cuartos.

Desde la perspectiva de Gravemeijer (1999), estas evidencias muestran que los estudiantes comenzaron a transitar desde modelos construidos para describir una situación específica hacia representaciones que gradualmente pueden transformarse en modelos para pensar matemáticamente. Si bien este proceso aún no se encontraba consolidado durante la sesión 3, las producciones analizadas permiten identificar indicios importantes de reorganización conceptual y de construcción progresiva de relaciones entre las magnitudes fraccionarias.

Tabla 12

Frecuencias y porcentajes de desempeño en la sesión 3: representación y organización de magnitudes fraccionarias

Indicadores de matematización emergente	Descripción de respuestas observadas	Frecuencia (f)	Porcentaje (%)
Representación gráfica de magnitudes fraccionarias	Representación lineal continua que conserva relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes y la unidad de referencia.	6	24.0%
	Representación lineal parcial con dificultades para conservar las relaciones de proporcionalidad entre las magnitudes representadas.	6	24.0%
	Representación centrada en elementos aislados de la situación sin integrar la relación entre las magnitudes involucradas.	1	4.0%
	Sin evidencia gráfica suficiente para analizar la representación construida.	12	48.0%

Argumentación sobre la composición de magnitudes fraccionarias	Justificación basada en comparaciones entre magnitudes o en relaciones de equivalencia construidas a partir de las representaciones.	2	8.0%
	Explicación centrada en la descripción del procedimiento realizado sin explicitar las relaciones matemáticas involucradas.	3	12.0%
	Explicación basada en interpretaciones iniciales de la suma de fracciones que aún no consideran relaciones de equivalencia entre las magnitudes.	2	8.0%
	Sin evidencia escrita suficiente para analizar los argumentos producidos.	18	72.0%
Estrategias de medición y comparación de magnitudes	Reconoce la necesidad de utilizar referentes de medida, superposición o alineación de unidades para verificar la longitud representada.	4	16.0%
	Describe acciones de comparación o verificación realizadas durante la construcción de la representación, aunque sin llegar a consolidar una solución completa.	4	16.0%
	Sin evidencia escrita suficiente para identificar las estrategias de medición utilizadas.	17	68.0%
Construcción de relaciones entre la unidad y las fracciones resultantes	Establece relaciones de equivalencia mediante representaciones gráficas que articulan diferentes particiones de una misma unidad.	1	4.0%
	Reconoce que una misma magnitud puede representarse mediante distintas combinaciones de fracciones equivalentes.	4	16.0%
	Utiliza procedimientos de cálculo propios para representar la composición de magnitudes fraccionarias, evidenciando intentos de generalización de relaciones numéricas.	3	12.0%

Sin evidencia suficiente para analizar la construcción de relaciones entre la unidad y las fracciones obtenidas.	17	68.0%
--	----	-------

Fuente: Elaboración propia con base en los registros de la sesión 3.

Uno de los aspectos más relevantes observados durante la sesión fue la diversidad de estrategias empleadas por los estudiantes para interpretar la composición de magnitudes fraccionarias representadas mediante los listones. Las producciones analizadas muestran distintos niveles de comprensión respecto a la relación existente entre las partes de una unidad y las formas de expresar una misma cantidad mediante representaciones equivalentes.

Las respuestas de algunos estudiantes evidenciaron que las magnitudes continuaban siendo interpretadas principalmente desde la cantidad de partes observadas y no necesariamente desde la relación que dichas partes guardaban con la unidad de referencia. Esta forma de razonamiento puede considerarse consistente con los procesos iniciales de construcción del significado de las fracciones, donde la atención suele centrarse en el número de particiones visibles antes de consolidar la comprensión de la magnitud representada por cada una de ellas.

Por ejemplo, Esteban argumentó: “Porque sería $\frac{2}{6}$, porque 1 de 2 y el otro 1 del cuarto, $1+1=2$, y lo que quiere es de $\frac{1}{6}$ ”. Esta explicación permite identificar que el estudiante intentó construir una respuesta utilizando relaciones numéricas conocidas previamente, recurriendo a la suma de los términos observados en cada fracción. Más que interpretarse únicamente como una respuesta incorrecta, esta producción constituye una evidencia de que el alumno aún se encuentra organizando las relaciones entre numerador, denominador y unidad de referencia, apoyándose en esquemas de pensamiento asociados a los números naturales.

Desde la perspectiva de la EMR, este tipo de producciones resulta especialmente valioso porque permite reconocer las estrategias informales que los estudiantes movilizan para dar sentido a situaciones nuevas (Freudenthal, 1983). Las respuestas muestran que los alumnos no actúan de manera aleatoria; por el contrario, intentan establecer regularidades y construir

explicaciones coherentes con los conocimientos disponibles en ese momento de su trayectoria de aprendizaje.

En contraste, otros estudiantes comenzaron a utilizar las representaciones gráficas construidas durante la actividad para justificar relaciones entre las magnitudes involucradas. En estos casos, las tiras y los esquemas de la medida faltante dejaron de funcionar únicamente como representaciones de la situación concreta y comenzaron a convertirse en modelos para analizar las relaciones entre las fracciones. Este proceso constituye un indicador importante del tránsito hacia formas más estructuradas de razonamiento matemático, característico del nivel referencial descrito por Gravemeijer (1999).

Las evidencias obtenidas sugieren que los estudiantes iniciaban la construcción de una comprensión más profunda acerca de la necesidad de comparar magnitudes expresadas mediante una misma unidad de referencia. Aunque la formalización de las equivalencias aún no se encontraba consolidada, las producciones muestran que algunos alumnos comenzaron a reconocer que diferentes representaciones podían corresponder a una misma longitud o cantidad, aspecto fundamental para la comprensión posterior de la suma y resta de fracciones.

En conjunto, los hallazgos de esta sesión permiten identificar un proceso gradual de reorganización de los significados construidos durante las actividades previas. Las representaciones gráficas, las comparaciones entre magnitudes y las explicaciones producidas por los estudiantes constituyen evidencias de la transición desde estrategias apoyadas principalmente en la observación y la manipulación hacia formas de razonamiento que empiezan a apoyarse en relaciones matemáticas cada vez más explícitas.

Tabla 13

Frecuencias y porcentajes de desempeño en la sesión 4: Construcción de relaciones de equivalencia mediante representaciones gráficas

Indicadores de Matematización Emergente	Categoría de Respuesta Observada	Frecuencia (f)	Porcentaje (%)
--	---	---------------------------	---------------------------

Representación cartográfica del terreno A ($\frac{4}{8}$)	División simétrica, congruente y exacta en 8 partes con 4 secciones coloreadas de forma correcta (Trazo vertical, horizontal o diagonal combinados).	11	44.0%
	División asimétrica, errónea o con número incorrecto de particiones ($\frac{7}{16}$, novenos, etc.) / Mal coloreado.	3	12.0%
	Coloreado estimativo de la superficie sin trazo o división explícita de las partes.	2	8.0%
	Ausencia de registro cartográfico / Hoja en blanco.	9	36.0%
Representación Cartográfica del Terreno B ($\frac{2}{4}$)	División simétrica, congruente y exacta en 4 partes con 2 secciones coloreadas de forma correcta.	14	56.0%
	División asimétrica, errónea o con número incorrecto de particiones (ej. colorea octavos en lugar de cuartos).	2	8.0%
	Coloreado estimativo de la superficie sin trazo o división explícita de las partes.	1	4.0%
	Ausencia de registro cartográfico / Hoja en blanco.	8	32.0%
Explicación del Error de Magnitud	Reconocimiento explícito de la equivalencia espacial ("Miden lo mismo los dos", "Tienen el mismo terreno pero diferentes partidos").	3	12.0%
	Validación del error del "vecino" basado en el orden de los naturales ("Antonio tiene más porque tiene $\frac{4}{8}$ o números más grandes").	5	20.0%
	Respuestas ambiguas o tautológicas incongruentes ("Haciendo suma y resta").	2	8.0%
	Ausencia de respuesta argumentativa / Hoja en blanco.	15	60.0%

Descubrimiento de relaciones numéricas entre numerador y denominador	identifica relaciones multiplicativas o divisorias entre numeradores y denominadores para explicar equivalencias entre fracciones. Mitad-doble ("el 4 es la mitad de 8 y el 2 la mitad de 4" o vía división $8 \div 4 = 2$).	2	8.0%
	Estrategia empírica basada exclusivamente en el conteo visual ("Contando los cuadritos", "Porque lo coloreamos").	2	8.0%
	Negación explícita de la existencia de relaciones numéricas ("No tienen relación", "Ninguno").	3	12.0%
	Ausencia de respuesta de abstracción relacional / Hoja en blanco.	18	72.0%
Formulación de regularidades y generalizaciones emergentes	Propone explicaciones o regularidades basadas en patrones observados en las representaciones construidas.	3	12.0%
	Utiliza procedimientos numéricos propios para interpretar las relaciones identificadas entre las fracciones.	2	8.0%
	Expresa dificultades para formular una regularidad general a partir de los casos analizados.	1	4.0%
	Sin evidencia suficiente para analizar procesos de generalización matemática.	19	76.0%

El análisis conjunto de las producciones desarrolladas durante la sesión 4 permite identificar avances significativos en la construcción de relaciones entre diferentes representaciones fraccionarias. A diferencia de las actividades previas, centradas principalmente en la manipulación de magnitudes y la representación de longitudes, en esta sesión los estudiantes comenzaron a utilizar los modelos construidos para establecer comparaciones, justificar equivalencias y explorar relaciones numéricas entre las fracciones analizadas.

Las evidencias ponen de manifiesto el conflicto cognitivo clásico descrito por Streefland (1991) respecto al "efecto distractor del número natural" en el aprendizaje de las fracciones. Al enfrentar la pregunta de si $\frac{4}{8}$ es mayor que $\frac{2}{4}$ debido a la presencia de dígitos nominalmente más grandes, solo el 12.0% (3 alumnos) logró formalizar con éxito la noción de equivalencia en el plano conceptual, mientras que un 20.0% (5 alumnos) validó explícitamente el error, subordinando la magnitud espacial percibida al orden numérico de los números enteros. Este arraigo al orden de los naturales se evidenció de forma contundente en las interacciones iniciales de la sesión:

DF: ¿El terreno de Antonio es más grande que el de Bernardo?

Alumnos: Sí.

DF: ¿Por qué?

Aurora: Porque el de Antonio es de cuatro partes y el de Bernardo es de dos.

DF: Entonces, según los números, ¿el de Antonio es más grande que el de Bernardo?

Alumnos: Sí.

DF: ¿Y en el dibujo te quedaron de diferente tamaño?

Alumnos: Sí.

DF: Observen el dibujo que hicieron ¿Es cierto que Antonio tiene el terreno más grande?

Alumnos: Sí.

DF: ¿Por qué?

Aranza: Porque Antonio tiene cuatro partes y Bernardo tiene dos.

DF: ¿Pueden escribir una regla para que otros niños puedan saber cuándo dos fracciones representan la misma cantidad? Por ejemplo, ¿un medio puede representarse de otra manera?

Alumnos: Sí.

DF: ¿Se acuerdan de los listones? El blanco representaba un medio y el rojo representaba un cuarto, ¿verdad?

Alumnos: Sí.

DF: Si yo les pido representar un medio sin utilizar el listón blanco, ¿cómo podrían hacerlo?

Sebas: Con dos listones rojos.

DF: ¿Por qué?

Esteban: Porque dos cuartos equivalen a un medio.

DF: Antonio dice que su terreno es más grande porque tiene cuatro partes, mientras que Bernardo tiene dos. ¿Antonio tiene razón?

Geraldine: No.

DF: ¿Por qué?

Geraldine: Porque, aunque Antonio tiene cuatro partes y Bernardo dos, los terrenos ocupan la misma cantidad.

Un aspecto particularmente relevante fue la aparición de explicaciones que comenzaron a trascender la descripción visual de las representaciones para apoyarse en relaciones numéricas entre las fracciones analizadas. Este salto cualitativo hacia la identificación de patrones y regularidades numéricas estables se evidenció cuando se instó directamente al grupo a examinar los componentes de los símbolos matemáticos:

DF: Observen las fracciones. Antonio tiene cuatro octavos y Bernardo tiene dos cuartos. ¿Qué relación encuentran entre los números de arriba? (señalando los numeradores 4 y 2 respectivamente)

Ashly: El cuatro es el doble de dos.

DF: ¿Y qué relación encuentran entre los números de abajo? (señalando los denominadores 8 y 4)

Keyler: El ocho es el doble de cuatro.

Otro ejemplo de ello puede observarse en la producción de Geraldine, quien argumentó: “Nadie puede pelear por el tamaño, $8 \div 4$ es 2 y $4 \div 2$ es 2”, haciendo referencia a la relación entre los numeradores y los denominadores de dos fracciones ($\frac{4}{8}$ y $\frac{2}{4}$). Esta respuesta muestra que el estudiante identificó una regularidad numérica entre los términos de las fracciones comparadas y utilizó dicha relación como criterio para justificar que ambas representaciones conservaban la misma magnitud.

Aunque la argumentación aún no emplea el lenguaje formal propio de las razones equivalentes o de la proporcionalidad, evidencia una comprensión emergente de que las relaciones entre numeradores y denominadores pueden mantenerse constantes aun cuando las

representaciones gráficas sean diferentes. Desde la perspectiva de Streefland (1991), este tipo de razonamientos constituye una manifestación temprana del pensamiento proporcional, ya que los estudiantes comienzan a interpretar las fracciones no únicamente como particiones aisladas, sino como relaciones que pueden compararse y analizarse matemáticamente.

La Sesión 5 actuó como el cierre pedagógico del nivel referencial. El reto consistía en determinar la longitud exacta de una medida misteriosa combinando tiras de distinta denominación ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y la introducción de octavos como unidades de ajuste), consolidando la transición desde el modelo de una situación de medición hacia un modelo para el cálculo aditivo generalizado.

Tabla 14

Frecuencias y porcentajes de desempeño durante la sesión 5: El misterio de la medida y el espacio sobrante

Indicadores de matematización emergente	Descriptor de respuestas observadas	Frecuencia (f)	Porcentaje
Registro de ajuste y unidades métricas utilizadas	Identificación de la unidad de ajuste fina ("3 octavos" "3 rosas" o combinaciones de octavos y cuartos).	4	16.0%
	Identificación errónea o incompleta de la unidad métrica remanente ("1 Rosa", "1 medio", etc.).	2	8.0%
	Ausencia de respuesta en el registro de unidades de ajuste / Hoja en blanco.	19	76.0%
Explicación procedimental del descubrimiento de la longitud	Descripción del proceso secuencial de superposición, iteración o descarte métrico ("las medimos con otras tiras", "usar uno por uno").	5	20.0%
	Descripción social/afectiva no matemática ("porque nos juntamos para hacer el trabajo").	1	4.0%

	Ausencia de descripción procedimental / Hoja en blanco.	19	76.0%
Reconocimiento de la unidad de referencia en la composición de magnitudes	Reconoce que las partes representadas poseen magnitudes diferentes y explica la necesidad de considerar su medida antes de compararlas o combinarlas.	3	12.0%
	Explicación inicial basada en apreciaciones generales sobre la situación, sin explicitar aún relaciones matemáticas entre las magnitudes.	1	4.0%
	Sin evidencia suficiente para analizar la explicación producida.	21	84.0%
Nombramiento y representación de la magnitud compuesta	Representa la magnitud resultante mediante expresiones numéricas coherentes con la situación de medición planteada.	4	16.0%
	Relaciona la magnitud construida con unidades de medida conocidas en otros contextos.	1	4.0%
	Utiliza denominaciones generales para describir la magnitud obtenida sin establecer aún una representación matemática específica.	2	8.0%
	Sin evidencia suficiente para analizar la representación de la magnitud resultante.	18	72.0%

La actividad “*El misterio de la medida y el espacio sobrante*” permitió profundizar en la comprensión de las relaciones entre las magnitudes representadas y la necesidad de interpretar la unidad de referencia como elemento central para la construcción de significados matemáticos. A diferencia de las sesiones anteriores, donde la atención se centró principalmente en la comparación de particiones y en la identificación de equivalencias, en esta ocasión los estudiantes tuvieron que explicar qué representaba la magnitud obtenida y cómo podía describirse dentro del contexto de la situación planteada.

Las producciones de Esteban, Keyler y Jesús muestran indicios de una comprensión emergente acerca de la necesidad de considerar la relación entre las partes y el todo antes de

asignar una denominación a la magnitud resultante. Sus respuestas sugieren que los estudiantes comenzaron a utilizar las representaciones construidas durante la intervención como referentes para interpretar la situación, apoyándose tanto en elementos visuales como en relaciones numéricas previamente exploradas. Este avance se materializó de forma colectiva cuando los alumnos, guiados por la intervención docente descubrieron la pertinencia de introducir una unidad de ajuste más fina (el listón rosa, correspondiente a los octavos) para resolver la situación:

Keyler: Un rojo y un rosa.

DF: ¿Un rojo y un rosa? Vamos a ver... Tenemos un listón rojo, que representa un cuarto. Si agregamos uno rosa, ¿hasta dónde llegamos?

Esteban: Hasta aquí (se para y señala el punto medio entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$)

DF: ¿Queda entre un cuarto y un medio?

Alumnos: Sí.

DF: ¿Podemos representarlo solamente con listones rosas?

Jesús: Sí.

DF: ¿Cuántos rosas ocuparíamos?

Jesús: Tres rosas.

DF: Vamos a comprobarlo. Contemos los octavos. Uno...

Alumnos: dos, tres.

DF: Entonces, ¿qué medida encontramos entre un cuarto y un medio?

Alumnos: Tres octavos.

DF: ¿Por qué?

Jesús: Porque un cuarto son dos octavos y un medio son cuatro octavos.

Este comportamiento evidencia que las representaciones dejaron de funcionar únicamente como registros de la actividad para convertirse progresivamente en herramientas de análisis y comunicación matemática. Particularmente, la producción de Esteban permite observar un intento por vincular la representación gráfica con una explicación acerca de la magnitud obtenida. Aunque la argumentación aún conserva elementos del lenguaje cotidiano, el estudiante muestra esfuerzos por justificar la relación entre las partes consideradas y la unidad de referencia. Este tipo de respuestas resulta relevante porque evidencia que el significado de la

fracción comienza a construirse más allá de la simple identificación de una partición, incorporando relaciones entre las magnitudes involucradas.

De manera similar, las respuestas de Geraldine y Edgar reflejan procesos de interpretación en los que los estudiantes intentan explicar la magnitud resultante a partir de las representaciones elaboradas durante la actividad. Aunque las explicaciones no siempre alcanzan niveles de formalización matemática, muestran que los alumnos empiezan a reconocer que las fracciones pueden utilizarse para describir cantidades y relaciones dentro de una situación específica. Estas producciones constituyen evidencias de que los estudiantes avanzan gradualmente desde la descripción de acciones concretas hacia formas más estructuradas de razonamiento.

Desde la perspectiva de Gravemeijer (1999), este proceso puede interpretarse como una manifestación del tránsito característico del nivel referencial, en el cual los modelos construidos a partir de una situación contextual comienzan a desempeñar una función organizadora del pensamiento matemático. Las representaciones ya no sólo describen la situación original, sino que permiten establecer relaciones, formular explicaciones y explorar nuevas formas de interpretar las magnitudes involucradas.

En conjunto, las evidencias obtenidas en esta sesión sugieren que los estudiantes comenzaron a atribuir significados cada vez más consistentes a las magnitudes resultantes de la composición de fracciones. Aunque las explicaciones continúan apoyándose en elementos contextuales y representaciones visuales, se observan avances en la construcción de argumentos que articulan la unidad de referencia, las particiones realizadas y la magnitud obtenida. Estos hallazgos muestran una consolidación progresiva del nivel referencial y preparan el tránsito hacia formas de razonamiento más generales y formalizadas.

El análisis de las sesiones 3, 4 y 5 de la intervención didáctica permite extraer conclusiones fundamentales respecto a la transición de la matematización horizontal a la vertical. Se puede identificar que las representaciones de los estudiantes en este nivel operan bajo una doble naturaleza. Para una parte de los alumnos, el dibujo es una herramienta activa de cálculo y una extensión de su acción física. Para la otra porción, persisten dificultades para decodificar la

información espacial del dibujo y transformarla en relaciones numéricas de equivalencia, replegándose hacia reglas basadas en números naturales.

Las sesiones analizadas en este bloque contribuyeron de manera progresiva a que los estudiantes construyeran la noción de que no es posible operar aritméticamente con fracciones heterogéneas sin establecer previamente una unidad de referencia común. El paso del “listón de color” al “cuadro del terreno” y, finalmente, al “ajuste en octavos”, favoreció la identificación de relaciones entre las magnitudes representadas y la necesidad de recurrir a un denominador común para compararlas y combinarlas, generando condiciones para el tránsito hacia formas de razonamiento matemático más generales y progresivamente formalizadas.

Nivel General: Generalización de Relaciones y Reorganización de Estrategias

El tercer momento del análisis corresponde al nivel general, fase en la que los estudiantes comienzan a utilizar las relaciones construidas en experiencias previas para interpretar, resolver y justificar nuevas situaciones matemáticas con un menor apoyo del contexto original. De acuerdo con Gravemeijer (1999) y Van den Heuvel-Panhuizen (2003), este nivel se caracteriza por la reorganización progresiva de los conocimientos desarrollados durante la matematización horizontal y referencial, permitiendo que las representaciones, estrategias y relaciones identificadas se conviertan en herramientas para el razonamiento matemático.

En esta etapa, el interés se centra en identificar cómo los estudiantes movilizan las relaciones de equivalencia, las estrategias de comparación y los procedimientos construidos en las sesiones anteriores para abordar situaciones relacionadas con la suma de fracciones heterogéneas. Más que depender exclusivamente de materiales concretos o representaciones contextuales, los alumnos comienzan a apoyarse en regularidades, relaciones numéricas y explicaciones cada vez más estructuradas para fundamentar sus decisiones. Desde la perspectiva de la EMR, estas producciones constituyen evidencias del tránsito hacia formas de pensamiento matemático progresivamente más generales, sin que ello implique una desvinculación total de los significados construidos en los niveles precedentes.

Sesión 6: *"El Camino Largo de la Hormiga"* (ruptura de la barrera de la unidad)

El propósito central de esta sesión consistió en enfrentar al alumnado a longitudes que superan el entero base (el metro lineal), evaluando la coexistencia de representaciones fraccionarias impropias e iterativas. El análisis cualitativo y cuantitativo se estructuró a partir de cuatro indicadores específicos de desempeño.

Esta sesión representa un punto de inflexión dentro del nivel general, ya que los estudiantes comienzan a enfrentarse a situaciones donde la magnitud resultante supera la unidad de referencia. Desde la perspectiva de Streefland (1991), este tipo de tareas favorece la comprensión de las fracciones impropias como medidas y no únicamente como representaciones numéricas. Asimismo, la necesidad de coordinar distintas formas de expresar una misma longitud ($\frac{5}{4}$ y $1 \frac{1}{4}$) constituye una oportunidad para que los estudiantes articulen representaciones gráficas, simbólicas y verbales, aspecto que Gravemeijer (1999) considera fundamental en el tránsito hacia formas más generales de razonamiento matemático.

Tabla 15

Sistematización de respuestas obtenidas por los alumnos en la sesión 6: Construcción de significados sobre magnitudes mayores que la unidad

Indicador de análisis	Caracterización de respuestas observadas	Frecuencia (f)	Porcentaje
Representación gráfica de magnitudes superiores a la unidad	Representa la composición de fracciones mediante una línea continua que integra la unidad y la fracción excedente.	9	36.0%
	Representa parcialmente la magnitud total, identificando algunos de sus componentes, aunque sin integrar completamente la continuidad del recorrido.	4	16.0%
	Sin evidencia gráfica suficiente para analizar la representación construida	12	48.0%
Representación simbólica de la magnitud resultante	Expresa la longitud total mediante una combinación de la unidad y la fracción excedente.	1	4.0%

	Utiliza notaciones numéricas que evidencian intentos de representar la magnitud obtenida, aunque aún presenta dificultades para establecer la relación entre numerador, denominador y unidad.	12	48.0%
	Sin evidencia suficiente para analizar la representación simbólica construida.	12	48.0%
Comprensión de relaciones entre diferentes representaciones de una misma magnitud	Justifica la equivalencia entre representaciones apoyándose en acciones de medición, comparación o reconstrucción de la longitud total.	6	24.0%
	Reconoce diferencias entre las representaciones, aunque sin establecer aún relaciones de equivalencia entre ellas.	2	8.0%
	Sin evidencia suficiente para analizar los argumentos producidos.	17	68.0%
Transformación y reorganización de particiones equivalentes	Utiliza representaciones equivalentes para expresar una misma magnitud mediante nuevas particiones.	1	4.0%
	Recurrir a la manipulación de materiales para reconstruir relaciones entre fracciones equivalentes.	4	16.0%
	Sin evidencia suficiente para analizar la transformación de las particiones.	20	80.0%

La situación planteada con una longitud total equivalente a $\frac{5}{4}$ permitió analizar cómo los estudiantes interpretan y representan magnitudes que superan la unidad de referencia. La discusión comenzó con una confrontación cognitiva en torno a la magnitud del recorrido, donde las primeras intuiciones sobrepasaron los límites reales de la unidad:

DF: El camino que recorrió la hormiga está formado por tres listones rojos y un listón blanco. ¿Cuánto mide el listón blanco?

Alumnos: Medio metro.

DF: ¿Y los tres listones rojos cuánto representan?

Alumnos: Tres cuartos.

DF: Entonces, queremos saber cuál es la distancia total que recorrió la hormiga. Si primero recorrió tres cuartos y después un medio, ¿cuánto recorrió en total?

Aurora: Un metro y medio.

DF: Revisemos las medidas. Si fuera un metro y medio tendríamos un metro completo más un medio. ¿Es eso lo que tenemos?

Alumnos: No.

En el plano gráfico (indicador 1), se identificaron diversas estrategias de representación. Por un lado, Samantha y Ashly construyeron una línea continua mediante la yuxtaposición de tiras de distintos colores, evidenciando que reconocían la longitud total como una magnitud integrada y no como segmentos aislados. Asimismo, Aranza mostró un nivel de organización más elaborado al representar explícitamente los distintos recorridos mediante colores diferenciados ($\frac{3}{4}$ rojo y $\frac{1}{2}$ blanco) y ubicar a la hormiga sobre el trayecto construido, apoyándose en una representación cercana al modelo de la recta numérica.

No obstante, al trasladar estas representaciones al plano simbólico (indicador 2), se observaron dificultades para expresar matemáticamente una magnitud superior a la unidad. El 48 % de los estudiantes ($n=12$) utilizó notaciones que evidencian intentos de representar el recorrido total, aunque sin establecer plenamente la relación entre la unidad completa y la fracción excedente. Producciones como las de Adriel, Esteban y Sebastián muestran que algunos alumnos registraron únicamente “ $\frac{1}{4}$ ” o expresiones similares para referirse al resultado, centrando su atención en la porción adicional del recorrido. Para reorientar esta noción y rescatar el valor del entero sin perder el residuo, se realizó una mediación para orientar la formalización de la respuesta grupal:

DF: Entonces, si la hormiga recorrió tres listones rojos, ¿qué fracción recorrió?

Alumnos: Tres cuartos.

DF: Y después recorrió un listón blanco. ¿Cuánto mide el blanco?

Alumnos: Un medio.

DF: Entonces debemos sumar tres cuartos más un medio.

DF: ¿Alguien encontró una respuesta?

Jesús: Un metro con un cuarto.

DF: ¿Por qué un metro con un cuarto Jesús?

Jesús: Porque al juntar los listones se completa un metro y todavía sobra un rojo.

DF: ¿Y cuánto vale ese rojo?

Alumnos: Un cuarto.

DF: Entonces, ¿Cuál es el camino total que recorrió la hormiga?

Jesús: Un metro y un cuarto.

Este comportamiento sugiere que, para estos estudiantes, la representación de la fracción continúa vinculada principalmente a una única unidad de referencia, dificultando la integración de la unidad completa y la fracción restante en una misma expresión matemática. Desde la perspectiva de Streefland (1991), estas producciones constituyen evidencias de una comprensión en transición, donde la noción de fracción como medida aún se encuentra en proceso de ampliación hacia magnitudes que exceden el entero.

Los resultados de esta sesión muestran que algunos estudiantes comenzaron a construir significados más amplios acerca de las magnitudes que exceden la unidad de referencia. Un ejemplo representativo puede observarse en la producción de Aranza, quien inicialmente registró únicamente “5” como resultado del recorrido y posteriormente reformuló su respuesta como “1 metro, 1 cuarto”. Este cambio evidencia un avance en la interpretación de la situación, ya que el estudiante dejó de centrar su atención exclusivamente en la cantidad de segmentos observados para reconocer que la longitud total estaba compuesta por una unidad completa y una fracción adicional de la misma. Esta doble interpretación simbólica (como número mixto o fracción impropia) se consolidó al cierre del debate entre los alumnos más avanzados:

DF: Si contamos todo en cuartos, ¿cuántos cuartos hay en el recorrido?

Alumnos: Cinco cuartos.

DF: ¿Cómo lo saben? ¿Cómo saben que tenemos cinco cuartos al final del recorrido?

Jesús: Porque el medio equivale a dos cuartos y, junto con los tres cuartos, son cinco cuartos.

DF: ¡Muy bien Jesús! Entonces, ¿cinco cuartos y un metro con un cuarto representan la misma cantidad?

Jesús, Esteban, Ashly: Sí maestra (de forma unánime).

Este tipo de producciones sugiere que algunos alumnos comenzaron a comprender que las fracciones no sólo representan particiones de una unidad, sino también cantidades que pueden extenderse más allá de ella. Desde la perspectiva de Streefland (1991), estos razonamientos constituyen indicios de una comprensión emergente de la fracción como medida, en la que la unidad de referencia mantiene su significado mientras se incorpora una porción adicional que amplía la magnitud representada. Aunque estas explicaciones aún no alcanzan niveles de formalización plenamente consolidados, muestran avances importantes en la articulación entre representaciones gráficas, lenguaje verbal y expresiones numéricas.

En conjunto, las evidencias obtenidas durante la sesión permiten identificar que los estudiantes comenzaron a reorganizar los significados construidos en actividades anteriores para interpretar situaciones en las que la magnitud resultante supera la unidad. Las representaciones producidas, las justificaciones proporcionadas y los intentos por expresar simbólicamente el recorrido total muestran que el grupo avanzó en la comprensión de las relaciones entre la unidad y las fracciones que la complementan. Estos hallazgos reflejan una evolución progresiva hacia formas de razonamiento más generales, en las que las relaciones matemáticas adquieren un papel cada vez más relevante para interpretar y comunicar los resultados obtenidos.

Sesión 7: "El Desafío de las Longitudes Variadas"

Esta sesión representa un momento clave dentro del *nivel general*, ya que el foco deja de situarse en la construcción de equivalencias aisladas para centrarse en la utilización flexible de dichas relaciones al resolver una misma situación mediante diferentes combinaciones de fracciones. Desde la perspectiva de la EMR, esta sesión permite analizar cómo los estudiantes comienzan a reorganizar los conocimientos construidos previamente para generar múltiples estrategias de solución y justificar relaciones entre distintas representaciones de una misma magnitud.

Tabla 16

Estrategias de construcción y reorganización de longitudes equivalentes en la sesión 7

Indicador de análisis	Respuestas observadas	Frecuencia (f)	Porcentaje (%)
------------------------------	------------------------------	-----------------------	-----------------------

Construcción flexible de longitudes equivalentes para $\frac{2}{4}$ de metro	Utiliza particiones homogéneas equivalentes para representar la magnitud solicitada.	5	20.0 %
	Reconoce y utiliza equivalencias directas entre diferentes representaciones de una misma longitud.	7	28.0 %
	Combina distintas unidades fraccionarias para construir una misma magnitud.	2	8.0 %
	Sin evidencia suficiente para analizar la estrategia utilizada.	11	44.0 %
Construcción y reorganización de la longitud de $\frac{5}{8}$ de metro	Representa la longitud mediante particiones homogéneas de la unidad de referencia.	3	12.0 %
	Utiliza combinaciones de fracciones equivalentes para construir la magnitud solicitada.	4	16.0 %
	Evidencia intentos parciales de representación de la longitud requerida.	3	12.0 %
	Sin evidencia suficiente para analizar la estrategia utilizada.	15	60.0 %
Construcción de magnitudes superiores a la unidad ($1\frac{1}{2}$ metros)	Integra la unidad completa y fracciones equivalentes para representar la longitud total.	7	28.0 %
	Utiliza iteraciones de fracciones menores para construir una magnitud mayor que la unidad.	3	12.0 %
	Representa parcialmente la magnitud solicitada.	2	8.0 %
	Sin evidencia suficiente para analizar la estrategia utilizada.	13	52.0 %

Los resultados muestran que una parte importante del grupo logró utilizar distintas formas de representar la longitud de $\frac{2}{4}$ de metro. Algunos estudiantes, como Sebastián, Sergio y Edgar, recurrieron directamente a la equivalencia entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$, registrando expresiones como “1 blanco” o “ $\frac{1}{2}$ ”. Estas respuestas evidencian que los alumnos comenzaron a reconocer que

diferentes representaciones pueden corresponder a una misma magnitud, utilizando las equivalencias construidas en sesiones previas como herramientas para resolver la tarea planteada.

De manera particular, la producción de Ashly muestra un nivel más amplio de flexibilidad al proponer diversas formas de construir una misma longitud. La estudiante registró alternativas basadas en una mitad, en cuatro octavos, en combinaciones de octavos y cuartos, así como en la repetición de subunidades equivalentes. Esta misma flexibilidad se manifestó verbalmente cuando la docente en formación cuestionó al grupo sobre alternativas de subdivisión fina:

DF: ¿Hay alguna otra manera de representar esos dos cuartos?

Keyler, Jesús, Esteban: Con cuatro rosas maestra.

DF: Con cuatro rosas, mmm y ¿cómo se llama esa medida que integra cuatro rosas?

Alumnos: Cuatro octavos.

DF: Entonces, ¿dos cuartos y cuatro octavos representan la misma cantidad?

Alumnos: Sí/No (respuestas divididas).

DF: Vamos a comprobarlo.

Más allá de la variedad de respuestas obtenidas, este hallazgo resulta relevante porque evidencia que el alumno comenzó a interpretar las fracciones como magnitudes susceptibles de descomponerse y recomponerse de distintas maneras sin alterar la longitud total representada. Esta situación se replicó al abordar la construcción de los $\frac{5}{8}$ de metro, donde los alumnos desplegaron múltiples combinaciones autónomas que validaban la conservación de la magnitud:

DF: Aquí dice cinco octavos. ¿De qué manera pueden representar esos cinco octavos?

Jesús: Un blanco y un rosa.

DF: ¿Cuánto vale el blanco?

Alumnos: Un medio.

DF: ¿Y cuánto vale el rosa?

Alumnos: Un octavo.

DF: Entonces, ¿qué medida representan en conjunto?

Esteban: Cinco octavos.

DF: Cinco octavos, y... ¿creen que hay otra forma de representar cinco octavos?

Ashly: Dos rojos y un rosa.

DF: ¿Por qué?

Ashly: Porque dos rojos son dos cuartos y la mitad de otro rojo equivale a un octavo.

DF: ¿Escucharon a sus compañeros? ¿Creen que hay otra forma de representar cinco octavos?

Jesús: Un rojo y tres rosas.

DF: Explícanos por qué Jesús.

Jesús: Porque un rojo vale dos octavos y tres rosas valen tres octavos. Dos octavos más tres octavos son cinco octavos.

Desde la perspectiva de Streefland (1991), este tipo de producciones constituye una manifestación de la comprensión relacional de las fracciones, en la que las equivalencias dejan de percibirse como casos aislados y pasan a formar parte de una red de relaciones matemáticas interconectadas. Al consolidar el análisis de las equivalencias de la unidad de referencia ($\frac{1}{2}$ metro), el grupo logró identificar equivalencias mediante el uso del material:

DF: Si tomamos un blanco completo, ¿cuánto representa?

Alumnos: Un medio.

DF: ¿Y cómo podemos representar ese medio con otras medidas?

Sebas: Con dos rojos.

DF: ¿Y con los rosas?

Keyler: Con cuatro rosas

Las respuestas obtenidas evidencian que algunos estudiantes comenzaron a utilizar las relaciones de equivalencia como recursos para construir y verificar distintas estrategias de solución. En este sentido, las representaciones dejaron de funcionar únicamente como apoyos para describir una magnitud específica y empezaron a desempeñar un papel más activo en la organización del razonamiento matemático. Este proceso constituye una característica propia del nivel general, donde los conocimientos desarrollados en situaciones previas comienzan a utilizarse de manera más flexible para interpretar y resolver nuevos desafíos matemáticos.

Sesión 9: "El Desafío de las Grandes Dimensiones en el Aula"

En esta sesión se propuso a los estudiantes medir distintos objetos del entorno escolar, como el pizarrón, la mesa del profesor y la puerta, para posteriormente construir nuevas formas de

representar las longitudes obtenidas utilizando combinaciones equivalentes de unidades y fracciones. A diferencia de las actividades iniciales de la intervención, las tareas demandaron una menor dependencia de la manipulación directa de materiales y una mayor utilización de relaciones matemáticas construidas durante las sesiones previas. De este modo, los estudiantes debieron apoyarse en sus conocimientos sobre equivalencia, composición de magnitudes y transformación de unidades para reinterpretar las mediciones realizadas.

Desde la perspectiva de Gravemeijer (1999), este tipo de situaciones favorece la transición hacia formas de razonamiento más generales, en las que los modelos construidos anteriormente comienzan a funcionar como herramientas para analizar nuevas situaciones. En este caso, el desafío consistió en reconocer que una misma longitud puede representarse mediante distintas combinaciones equivalentes, manteniendo constante la magnitud medida. La Tabla 17 presenta la distribución de las estrategias empleadas por los estudiantes para seleccionar unidades de referencia, construir representaciones equivalentes y justificar las relaciones entre las distintas mediciones obtenidas.

Tabla 17

Estrategias de representación equivalente y análisis de magnitudes en la sesión 9

Indicador de análisis	Categoría de respuesta observada	Frecuencia (f)	Porcentaje (%)
Selección de unidades de referencia para representar magnitudes	Utiliza unidades completas como referencia inicial para estimar o representar la longitud medida.	2	8.0 %
	Utiliza fracciones de una unidad como estrategia principal para representar la magnitud observada.	2	8.0 %
	Sin evidencia suficiente para analizar la estrategia utilizada.	21	84.0 %
Construcción de representaciones equivalentes de	Construye nuevas representaciones apoyándose en relaciones de equivalencia y proporcionalidad entre las unidades utilizadas.	3	12.0 %

una misma longitud	Reproduce la representación inicial sin establecer nuevas relaciones entre las unidades de medida.	2	8.0 %
	Evidencia intentos parciales de reorganización de la medición realizada.	1	4.0 %
	Sin evidencia suficiente para analizar la estrategia utilizada.	19	76.0 %
Comprensión de las relaciones entre distintas representaciones de una misma magnitud	Explica la equivalencia entre mediciones mediante relaciones de conservación y transformación de la longitud representada.	1	4.0 %
	Reconoce la equivalencia entre las mediciones, aunque sin explicitar las relaciones matemáticas que la justifican.	1	4.0 %
	Sin evidencia suficiente para analizar las explicaciones producidas.	23	92.0 %

Uno de los aspectos más relevantes de esta sesión fue la capacidad de los estudiantes para construir representaciones equivalentes de una misma longitud sin recurrir nuevamente al proceso de medición física. Este indicador permitió analizar en qué medida las relaciones construidas durante las actividades previas comenzaban a utilizarse como herramientas para interpretar y reorganizar las magnitudes representadas. En este sentido, se identificaron diferentes niveles de comprensión respecto al uso de equivalencias para representar una misma medida.

Un primer grupo de estudiantes, representado por MJ y Cristel, tendió a conservar la misma representación utilizada durante la medición inicial al momento de proponer una alternativa equivalente. Por ejemplo, al registrar la longitud del pizarrón, MJ utilizó la expresión “2 de $\frac{1}{2}$ ” tanto en la medición realizada como en la representación alternativa solicitada. Esta situación sugiere que, para algunos alumnos, la representación construida durante la experiencia de medición continuaba funcionando como el principal referente para describir la magnitud observada, sin que aún se evidenciara una reorganización de las relaciones de equivalencia

disponibles. Más que interpretarse como una dificultad aislada, estas respuestas muestran que el proceso de utilización flexible de las equivalencias aún se encontraba en desarrollo.

Por otro lado, un segundo grupo de estudiantes comenzó a utilizar las relaciones entre distintas particiones de la unidad para generar nuevas formas de representar una misma longitud. Aranza, Ashly y Dulce registraron inicialmente la medida de la mesa mediante la combinación “1 plateado y 2 rosas” y posteriormente propusieron como alternativa equivalente “2 blancos y 1 rojo”. Estas respuestas evidencian que algunos alumnos lograron reconocer que una misma magnitud puede construirse mediante diferentes combinaciones de unidades y fracciones equivalentes, reorganizando las relaciones previamente construidas para elaborar nuevas representaciones de la misma medida. Asimismo, este proceso de subdivisión de los modelos lineales dio pie a que los estudiantes propusieran unidades de medida más pequeñas cuando el objeto superaba los límites físicos de los listones disponibles, como ocurrió con el caso de Jesús y Esteban:

DF: Jesús, ¿cuánto te dio la medida del escritorio?

Jesús: Más del metro, pero probé con el rosa y aun así se pasa.

DF: ¿Qué hacemos entonces? Observa...

Jesús: Maestra, ¿se puede dividir a la mitad?

DF: Inténtalo.

DF: Jesús, ¿Cuánto te dio?

Jesús: 17.

DF: ¿17 de qué medida?

Jesús: De la mitad de los octavos.

DF: A ver, muéstramelo.

DF: Si te dio 17 de la mitad de los de octavos, ¿Qué medida es?

Jesús: ¿Son dieciseisavos maestra? (no muy seguro de su respuesta)

DF: ¿Puedes comprobarlo?

Jesús: Sí maestra, ya lo hice, son diecisiete.

DF: Y ¿Cómo se llama la medida total de la mesa?

Jesús: Serían diecisiete dieciseisavos, ¿no maestra?

DF: Veamos (evitando decir la respuesta) pero si ya lo comprobaste, escríbelo así.

Desde la perspectiva de Gravemeijer (1999), este tipo de producciones constituye una evidencia de que los modelos desarrollados durante la intervención comienzan a utilizarse como herramientas para el razonamiento matemático y no únicamente como apoyos para describir una situación concreta.

Las explicaciones proporcionadas por María José y Cristel también aportan información relevante sobre la comprensión alcanzada respecto a la conservación de la magnitud. Ante la pregunta sobre por qué dos equipos podían obtener resultados correctos utilizando listones de diferente tamaño, ambos estudiantes respondieron: “Porque se juntaron los listones pequeños nos da el metro, igual que los grandes”. Esta argumentación muestra que los alumnos comenzaron a reconocer que distintas combinaciones de unidades pueden representar una misma longitud siempre que conserven la magnitud total. Aunque la explicación permanece vinculada al contexto de los materiales utilizados, evidencia una comprensión emergente de las relaciones de equivalencia entre las particiones de una misma unidad.

En conjunto, los resultados de esta sesión sugieren que algunos estudiantes avanzaron hacia formas de razonamiento más flexibles al utilizar equivalencias para reinterpretar y reconstruir mediciones previamente realizadas. Las respuestas obtenidas muestran una comprensión progresiva de que una misma magnitud puede representarse mediante diferentes combinaciones de unidades y fracciones, conservando inalterada la longitud total. Estos hallazgos son consistentes con el nivel general de matematización, donde las relaciones construidas en experiencias previas comienzan a reorganizarse y utilizarse como herramientas para analizar nuevas situaciones matemáticas.

Sesión 10: El Misterio de los Envases y las Metas de Capacidad (transferencia de relaciones de medida en contextos de capacidad)

La décima sesión tuvo como propósito analizar si las relaciones matemáticas construidas previamente en contextos de longitud podían ser utilizadas por los estudiantes en una situación diferente relacionada con la capacidad de recipientes. Para ello, se plantearon actividades en las que los alumnos debían combinar recipientes de distintas capacidades (1 litro, $\frac{1}{2}$ litro, $\frac{1}{4}$ de litro y $\frac{1}{8}$ de litro) para alcanzar metas específicas de volumen.

Desde la perspectiva de la EMR, esta situación permitió identificar si los modelos y relaciones construidos durante las sesiones anteriores comenzaban a funcionar más allá del contexto en el que fueron generados. En particular, interesaba observar si las fracciones podían ser utilizadas como relaciones de medida transferibles a nuevas situaciones y no únicamente como representaciones asociadas a las tiras de papel o a las actividades de medición lineal trabajadas previamente. La Tabla 18 sintetiza los principales hallazgos observados durante la sesión.

Tabla 18

Evidencias de transferencia de relaciones de medida y tránsito hacia el nivel general de matematización

Aspecto analizado	Evidencias observadas	Porcentaje (%)	Interpretación pedagógica
Construcción de la meta de $\frac{1}{2}$ litro	Elaboración de múltiples combinaciones equivalentes utilizando recipientes de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ de litro.	56%	Los estudiantes reconocen que una misma magnitud puede representarse mediante distintas equivalencias. La fracción comienza a funcionar como una relación de medida y no únicamente como una partición física.
	Uso de una única combinación convencional.	12%	Se identifica comprensión de la equivalencia requerida, aunque con menor flexibilidad para explorar otras posibilidades de representación.
	Respuestas incompletas o ausencia de respuesta.	32%	Persisten dificultades para coordinar simultáneamente el tamaño de la unidad y la cantidad de recipientes necesarios.

Construcción de la meta de $\frac{3}{4}$ de litro	Combinaciones heterogéneas, principalmente $\frac{1}{2}$ litro + $\frac{1}{4}$ de litro.	44%	Se observa comprensión emergente de la composición aditiva de fracciones y de la conservación de la magnitud.
	Iteraciones de una misma unidad fraccionaria.	24%	La estrategia evidencia comprensión de la acumulación de cantidades, aunque con menor flexibilidad relacional.
	Omisión de respuesta.	32%	Algunos estudiantes continúan dependiendo de representaciones más concretas para establecer relaciones entre fracciones.
Construcción de la meta de 1 litro	Elaboración de diversas combinaciones equivalentes para representar el entero.	16%	Las respuestas muestran avances hacia formas más generales de razonamiento basadas en relaciones proporcionales y equivalencias.
	Uso de una sola representación.	4%	Se reconoce el entero como referencia, aunque con escasa exploración de alternativas.
	Omisión de respuesta.	80%	La coordinación simultánea de equivalencias múltiples continúa siendo un desafío para una parte importante del grupo.

Los resultados obtenidos muestran que una parte importante de los estudiantes logró construir distintas combinaciones para representar una misma cantidad. En la meta correspondiente a $\frac{1}{2}$ litro, el 56% del grupo propuso múltiples formas correctas de obtener la cantidad solicitada, utilizando recipientes homogéneos y heterogéneos. Entre las respuestas identificadas aparecieron combinaciones como dos recipientes de $\frac{1}{4}$ de litro, cuatro recipientes de $\frac{1}{8}$ de litro o la combinación de un recipiente de $\frac{1}{4}$ con dos recipientes de $\frac{1}{8}$.

El tránsito y validez de estas composiciones homogéneas iniciales se formalizaron mediante las interacciones del grupo guiadas por el trasvase de un fluido (aquí se tenía que buscar el medio, primero se descompuso en cuartos y los cuartos en octavos):

DF: ¿Cuánto vale esta medida? (señalando el recipiente de un cuarto de litro)

Alumnos: Un cuarto.

DF: ¿Y cómo lo podemos “convertir” a octavos?, ¿qué podemos hacer?

Sebas: Lo vaciamos (refiriéndose a hacer el transvase a vasos de $\frac{1}{8}$).

DF: Muy bien Sebas. Ayúdenme a contar. ¿Cuánto tenemos aquí? (realiza el transvase a los vasos de $\frac{1}{8}$)

Alumnos: Un octavo.

DF: ¿Y aquí?

Sebas: Otro octavo.

DF: Entonces, ¿cuántos octavos ocupamos para representar este medio litro?

Keyler: Cuatro.

DF: ¿Cuatro de qué tamaño?

Sam: De un octavo.

DF: Correcto. Entonces anotamos cuatro vasos de un octavo.

Inmediatamente después de validar la estrategia homogénea de acumulación, surgieron propuestas que coordinaban unidades de distinta magnitud para cubrir la misma meta de capacidad, demostrando que los alumnos empleaban las fracciones como herramientas relacionales vivas:

DF: Chicos: ¡vamos a buscar otra forma de representar medio litro! ¿De qué otra manera podemos hacerlo?

Ashly: Dos octavos y un cuarto.

DF: Vamos a comprobarlo. ¿Cuánto tenemos aquí? (muestra un vaso de $\frac{1}{8}$)

Alumnos: Un octavo.

DF: ¿Y aquí? (muestra dos vasos de $\frac{1}{8}$)

Ashly: Dos octavos.

DF: ¿Y lo que falta? (haciendo referencia a la representación de $\frac{1}{2}$ de litro)

Ashly: Un cuarto.

DF: Entonces, ¿de qué otra manera podemos representar medio litro?

Alumnos: Dos octavos y un cuarto.

DF: Muy bien. Lo anotamos en la forma C.

Estas producciones sugieren que los estudiantes comenzaron a reconocer que una misma magnitud puede representarse mediante diferentes equivalencias, aspecto fundamental para el desarrollo del pensamiento fraccionario. Los hallazgos permiten identificar que las relaciones construidas en contextos de longitud comenzaron a transferirse hacia situaciones de capacidad, favoreciendo procesos de generalización progresiva. Mientras que en las primeras sesiones los estudiantes dependían principalmente de la manipulación y observación directa de materiales concretos, en esta actividad algunos de los alumnos lograron anticipar combinaciones equivalentes y justificar sus respuestas mediante relaciones numéricas.

Desde la perspectiva del tránsito de la matematización horizontal a la vertical, las evidencias sugieren que los estudiantes comenzaron a utilizar las fracciones como herramientas para establecer relaciones entre magnitudes y no únicamente como representaciones asociadas a un contexto específico. En consecuencia, la sesión aporta indicios de avance hacia el nivel general de matematización, donde los modelos construidos previamente empiezan a funcionar como instrumentos para pensar matemáticamente y resolver nuevas situaciones de manera más autónoma.

De manera similar, al construir una meta de $\frac{3}{4}$ de litro, varios estudiantes recurrieron a combinaciones aditivas formadas por diferentes unidades fraccionarias, principalmente $\frac{1}{2}$ litro y $\frac{1}{4}$ de litro. Este razonamiento relacional emergió de forma coordinada a través de las siguientes interacciones en el aula, transitando de las representaciones repetitivas hacia deducciones de equivalencia compuesta:

DF: ¿Hay otra forma de representar tres cuartos?

Esteban: Con medio litro y dos octavos.

DF: Vamos a revisarlo (tomando los recipientes para hacer la comprobación). ¿Cuánto representa este recipiente? (mostrando el vaso de $\frac{1}{2}$)

Alumnos: Medio litro.

DF: ¿Y estos dos recipientes pequeños? (muestra dos pequeños vasos de $\frac{1}{8}$ de litro)

Alumnos: Dos octavos.

DF: ¿Representan juntos tres cuartos de litro?

Alumnos: Sí.

DF: Muy bien, entonces también podemos representar tres cuartos de litro como un medio litro y dos octavos, ¿verdad?

Alumnos: Si.

Este tipo de respuestas evidencia que las relaciones entre las partes y el todo comenzaron a ser comprendidas desde una perspectiva más flexible, donde la magnitud se conserva aun cuando cambian las unidades utilizadas para representarla.

La situación relacionada con la construcción de un litro completo representó un mayor desafío para el grupo. Aunque algunos estudiantes lograron generar diversas combinaciones equivalentes, una proporción importante omitió la respuesta. No obstante, las producciones recuperadas muestran intentos por coordinar la relación entre el tamaño del recipiente y la cantidad de veces que éste debía utilizarse para conservar la misma magnitud. Por ejemplo, se registraron expresiones como “2 de $\frac{2}{2}$ ”, “4 de $\frac{4}{4}$ ”, “8 de $\frac{8}{8}$ ” o combinaciones mixtas integradas por cuartos y octavos. Estas evidencias permiten identificar procesos iniciales de generalización matemática que van más allá de la simple manipulación de materiales.

Desde la perspectiva de la EMR, estos procedimientos constituyen evidencias de que las relaciones construidas previamente en contextos de longitud comenzaron a transferirse a situaciones de capacidad. Las fracciones dejan de funcionar únicamente como particiones asociadas a materiales concretos y comienzan a utilizarse como relaciones de medida que permiten comparar, componer y transformar magnitudes en diferentes contextos.

Tabla 19

Procedimientos utilizados por los estudiantes para construir diferentes metas de capacidad durante la Sesión 10

Meta de capacidad	Procedimiento identificado	Ejemplo de producción estudiantil	Interpretación matemática	Nivel de matematización observado
$\frac{1}{2}$ litro	Composición homogénea simple	2 recipientes de $\frac{1}{4}$ de litro	Reconocimiento de que dos cuartos equivalen a un medio.	Referencial
	Iteración de unidades pequeñas	4 recipientes de $\frac{1}{8}$ de litro	Comprensión de la acumulación de fracciones equivalentes para construir una magnitud mayor.	Referencial
	Composición heterogénea	1 recipiente de $\frac{1}{4}$ de litro y 2 recipientes de $\frac{1}{8}$ de litro	Coordinación de diferentes unidades fraccionarias para representar una misma cantidad.	Referencial–General
	Generación de múltiples rutas de solución	Registro simultáneo de varias combinaciones equivalentes	Flexibilidad para establecer relaciones de equivalencia entre distintas representaciones de una misma magnitud.	General
$\frac{3}{4}$ de litro	Composición aditiva heterogénea	1 recipiente de $\frac{1}{2}$ litro + 1 recipiente de $\frac{1}{4}$ de litro	Comprensión de la composición de magnitudes mediante la suma de diferentes unidades fraccionarias.	Referencial–General
	Iteración homogénea	6 recipientes de $\frac{1}{8}$ de litro	Reconocimiento de que una misma magnitud puede construirse mediante la acumulación de partes iguales.	Referencial

	Comparación de equivalencias	Distintas formas de obtener $\frac{3}{4}$ de litro utilizando recipientes diversos	Comprensión emergente de la conservación de la magnitud a través de representaciones equivalentes.	General
	Construcción directa del entero	1 recipiente de 1 litro	Reconocimiento del entero como unidad de referencia.	Referencial
	Composición mediante cuartos	4 recipientes de $\frac{1}{4}$ de litro	Comprensión de la relación entre la unidad y sus particiones equivalentes.	Referencial–General
	Composición mediante octavos	8 recipientes de $\frac{1}{8}$ de litro	Reconocimiento de equivalencias entre diferentes particiones de la unidad.	Referencial–General
1 litro	Composición mixta	Combinaciones de recipientes de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ de litro	Coordinación simultánea de diferentes unidades fraccionarias para conservar una misma magnitud.	General
	Generación de equivalencias múltiples	Registro de varias formas de completar un litro utilizando distintas combinaciones	Evidencia de razonamiento flexible basado en relaciones proporcionales y conservación de la medida.	General
	Representaciones personales del entero	“2 de $\frac{2}{2}$ ”, “4 de $\frac{4}{4}$ ”, “8 de $\frac{8}{8}$ ”, “ $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$ ”	Aunque existen imprecisiones en la notación convencional, las producciones muestran comprensión de la equivalencia entre	General

diferentes representaciones
del entero.

Los procedimientos identificados muestran que los estudiantes no se limitaron a reproducir una única estrategia para resolver las metas propuestas. Por el contrario, construyeron diferentes formas de representar una misma cantidad, utilizando composiciones homogéneas, heterogéneas y equivalencias entre fracciones. Conforme aumentó la complejidad de las metas, también se incrementó la necesidad de coordinar relaciones entre unidades de distinta magnitud. Desde la perspectiva de la EMR, estas producciones constituyen evidencias de que los modelos construidos en sesiones anteriores comenzaron a funcionar como herramientas para razonar matemáticamente, favoreciendo el tránsito desde un nivel referencial hacia un nivel general de matematización, donde las relaciones de medida se transfieren y aplican en contextos distintos al que les dio origen.

Nivel Formal: Hacia la Construcción de Relaciones Matemáticas Independientes del Contexto

En esta última fase del análisis se examinan las evidencias que sugieren la aproximación de los estudiantes al nivel formal de matematización. Este nivel representa un momento en el que las relaciones matemáticas construidas mediante situaciones contextualizadas y modelos emergentes comienzan a funcionar de manera más autónoma, permitiendo al alumnado operar con representaciones simbólicas sin depender constantemente de los recursos concretos que dieron origen a dichos significados (Gravemeijer, 1999).

En el contexto de esta investigación, el interés no radica en verificar el dominio de algoritmos convencionales para la suma y resta de fracciones, sino en identificar indicios de una reorganización progresiva del pensamiento matemático. Por ello, el análisis se centra en aquellas situaciones donde los estudiantes lograron establecer relaciones entre fracciones, construir equivalencias y coordinar diferentes unidades de medida sin recurrir necesariamente a materiales manipulativos o representaciones gráficas de apoyo.

A diferencia de los niveles situacional y referencial, donde las estrategias dependían en gran medida de la observación, la manipulación y la representación de contextos concretos, en

esta fase algunos estudiantes comenzaron a utilizar relaciones numéricas para justificar sus respuestas. Las producciones muestran que los alumnos fueron capaces de transformar medidas heterogéneas en medidas comparables mediante el reconocimiento de equivalencias, así como identificar distintas formas de representar una misma magnitud sin necesidad de reconstruir físicamente la situación planteada.

Sesión 8: *"El desafío del exceso y la medida de ajuste"* (Institucionalización de la suma y resta de fracciones heterogéneas)

El propósito de esta sesión consistió en plantear una situación que permitiera a los estudiantes utilizar los conocimientos construidos durante las actividades previas para resolver un problema relacionado con la resta de fracciones de distinto denominador. Para ello, se presentó un listón con una longitud total de $1 \frac{1}{4}$ metros, del cual debía retirarse un tramo de $\frac{1}{2}$ metro para determinar la medida exacta de la pieza restante. La resolución de la tarea implicó representar gráficamente la situación, interpretar las relaciones entre las partes de la unidad y utilizar fracciones equivalentes para comparar y operar con medidas expresadas en diferentes denominadores.

La Tabla 20 presenta los principales indicadores identificados en las producciones de los estudiantes. A través de ellos fue posible analizar la forma en que representaron la medida inicial, construyeron equivalencias entre fracciones, resolvieron la situación planteada y argumentaron sus respuestas frente a procedimientos incorrectos. En conjunto, estos elementos ofrecen evidencias sobre el proceso de transición desde estrategias apoyadas en modelos referenciales hacia formas de razonamiento más generales, donde las relaciones entre fracciones comienzan a utilizarse como herramientas para interpretar y resolver problemas de manera progresivamente autónoma.

Tabla 20

Evidencias del tránsito hacia formas más generales de razonamiento fraccionario durante la Sesión 8

Aspecto analizado	Evidencias observadas en las producciones estudiantiles	Frecuencia y porcentaje	Interpretación pedagógica
Representación de la medida inicial ($1\frac{1}{4}$ m)	Representación lineal del entero y el cuarto adicional, acompañada de la traducción correcta a cuartos (“5 cuartos”, “5 partes iguales”).	8 estudiantes (32.0%)	Los estudiantes logran relacionar la representación gráfica con una estructura fraccionaria común, evidenciando la comprensión de la unidad y sus particiones.
	Representaciones gráficas incompletas o sin correspondencia matemática clara.	5 estudiantes (20.0%)	Se observa dificultad para establecer relaciones entre la representación visual y la notación fraccionaria.
	Omisión de respuesta.	12 estudiantes (48.0%)	Una parte importante del grupo aún requiere apoyos para interpretar y representar magnitudes compuestas.
Construcción de equivalencias para comparar medidas	Conversión correcta de $\frac{1}{2}$ metro a cuartos ($\frac{2}{4}$).	6 estudiantes (24.0%)	Los estudiantes reconocen que las fracciones pueden expresarse mediante unidades equivalentes para facilitar la comparación.
	Confusión en la equivalencia o registros incorrectos.	4 estudiantes (16.0%)	Persisten dificultades para coordinar numerador, denominador y unidad de referencia.
	Omisión de respuesta.	15 estudiantes (60.0%)	La construcción de equivalencias continúa representando un desafío para una parte considerable del grupo.
Determinación de la medida sobrante ($1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$)	Obtención correcta del resultado mediante relaciones entre cuartos.	7 estudiantes (28.0%)	Los estudiantes comienzan a operar con magnitudes homogéneas y utilizan equivalencias para resolver la situación.
	Respuestas basadas en procedimientos no justificados o relaciones numéricas incorrectas.	5 estudiantes (20.0%)	Algunas producciones muestran intentos de operar sin comprender plenamente las relaciones entre las fracciones involucradas.

Análisis de un procedimiento incorrecto	Omisión de respuesta.	13 estudiantes (52.0%)	La resolución de situaciones con fracciones heterogéneas sigue representando una tarea compleja para gran parte del grupo.
	Explicación fundamentada sobre por qué no es posible restar directamente los denominadores.	3 estudiantes (12.0%)	Se observan indicios de razonamiento matemático más general, donde los estudiantes justifican sus respuestas a partir del significado de las fracciones y no únicamente del cálculo.
	Justificaciones ambiguas o sin sustento matemático claro.	3 estudiantes (12.0%)	Las explicaciones muestran comprensión parcial de la situación, aunque todavía con dificultades para argumentar matemáticamente.
	Omisión de respuesta.	19 estudiantes (76.0%)	La argumentación matemática constituye uno de los procesos de mayor complejidad dentro del proceso de aprendizaje observado.

El análisis de las producciones relacionadas con la representación de la medida inicial permitió identificar distintos niveles de comprensión sobre la relación entre la unidad y sus particiones. El 32.0% de los estudiantes ($f=8$) logró establecer correspondencias entre la representación gráfica del listón y su expresión mediante cuartos. Por ejemplo, Jesús dibujó de forma continua dos listones (uno plateado que representa conceptualmente la unidad entera de un metro y uno rojo adjunto de $\frac{1}{4}$ m), respondiendo de forma asertiva que el todo equivalía a "5 rojos". Asimismo, el Ashly dio muestras de un pensamiento relacional avanzado al dibujar dos líneas superpuestas: la superior contenía el entero integrado con el cuarto y la inferior subdividía de manera exacta la barra en cinco fracciones de cuartos, registrando formalmente "5 cuartos". Este comportamiento denota que la partición ya no requiere la acción física del doblado; el estudiante realiza un corte mental visual sobre la magnitud.

Por otra parte, el 20.0% del grupo ($f=5$) elaboró representaciones que no guardaban una relación clara con la situación planteada o registró expresiones numéricas sin correspondencia con la medida trabajada. Un ejemplo de ello fue el uso de fracciones construidas de manera arbitraria o representaciones gráficas que no mantenían relación con la unidad de referencia. Estas respuestas sugieren que algunos estudiantes aún se encontraban en proceso de consolidar las relaciones entre la representación visual, la unidad de medida y la notación fraccionaria. Más que interpretarse como errores aislados, estas producciones evidencian las dificultades que implica avanzar desde representaciones concretas hacia formas más generales de razonamiento matemático.

Uno de los aspectos más relevantes de la sesión se observó en la resolución de la medida sobrante. El 28.0% de los estudiantes ($f=7$) logró determinar correctamente que el residuo correspondía a tres cuartos de metro. Las respuestas muestran que algunos alumnos transformaron las medidas iniciales a una misma unidad de referencia antes de realizar la operación, reconociendo que un metro equivale a cuatro cuartos y que, al agregar un cuarto adicional, se obtiene un total de cinco cuartos. A partir de esta equivalencia, lograron interpretar que retirar un medio metro implicaba restar dos cuartos, obteniendo como resultado tres cuartos. Este procedimiento evidencia el uso de relaciones entre magnitudes equivalentes y constituye un indicio de avance hacia formas de razonamiento menos dependientes de la representación concreta.

Este tránsito hacia la pérdida de la dependencia material se hace evidente en el siguiente fragmento de interacción grupal, donde los alumnos reconstruyen numéricamente las operaciones a partir de relaciones de equivalencia entre los listones:

DF: Si al entero le quitamos un medio, ¿qué nos queda?

Jesús: Otro medio.

DF: Correcto. ¿Y el cuarto que ya teníamos?

Jesús: Se suma.

DF: Entonces, ¿cuánto tenemos ahora?

Alumnos: Un medio y un cuarto.

DF: ¿Cómo podemos comprobar esa medida con otros listones?

Ashly: Con dos rojos y otro rojo.

DF: ¿Cuántos rojos serían en total?

Ashly: Tres.

DF: ¿Y cómo se llama esa medida?

Geraldine: Tres cuartos.

DF: ¿Por qué tres cuartos?

Jesús: Porque un medio son dos cuartos y el otro rojo es un cuarto más.

DF: Entonces dos cuartos más un cuarto son...

Alumnos (Esteban, Jesús, Ashly, Aranza, Sebas): Tres cuartos.

DF: Entonces, ¿qué resultado obtuvimos al quitar un medio de un entero y un cuarto?

Esteban: Tres cuartos.

DF: ¿Cómo lo comprobaron?

Ashly: Porque un entero y un cuarto menos un medio deja un medio y un cuarto.

Jesús: Y un medio y un cuarto es igual a tres cuartos.

Finalmente, la actividad que solicitaba analizar un procedimiento incorrecto permitió explorar la capacidad de los estudiantes para justificar matemáticamente sus respuestas. En este caso, únicamente el 12.0% ($f=3$) logró explicar por qué no era posible restar directamente los denominadores al resolver la operación. Aunque el porcentaje fue reducido, estas respuestas muestran que algunos alumnos comenzaron a reflexionar sobre el significado de las fracciones y las condiciones necesarias para operar con ellas. Al mismo tiempo, las dificultades observadas en la mayoría del grupo sugieren que la construcción de argumentos matemáticos y la comprensión de las operaciones con fracciones heterogéneas continuaban siendo procesos en desarrollo. Estas evidencias permiten reconocer que la transición hacia formas más generales y formales de razonamiento matemático comenzaba a manifestarse, aunque todavía requería nuevas oportunidades de trabajo y reflexión para consolidarse.

Sesión 11 “*El residuo del misterio de la jarra*” (Transferencia de relaciones de medida en contextos de capacidad)

La sesión de cierre tuvo como propósito explorar si las relaciones matemáticas construidas durante la intervención podían ser utilizadas por los estudiantes en una situación de capacidad que implicaba operar con fracciones heterogéneas. Para ello, se presentó un problema en el que

una jarra contenía inicialmente $1 \frac{3}{4}$ litros de agua y posteriormente se retiraban $1 \frac{1}{2}$ litros, solicitando determinar la cantidad exacta de líquido que permanecía en el recipiente. A diferencia de actividades anteriores, la situación demandaba coordinar distintas representaciones de la magnitud y establecer relaciones entre fracciones sin recurrir directamente a la manipulación física de materiales.

Esta actividad permitió identificar hasta qué punto los modelos construidos en sesiones previas comenzaban a funcionar como herramientas de razonamiento en un contexto distinto al que les dio origen. En particular, interesaba analizar si los estudiantes podían reconocer equivalencias, transformar unidades de medida y utilizar representaciones matemáticas para resolver la situación planteada. La Tabla 21 sintetiza las principales estrategias observadas en las producciones estudiantiles y los procedimientos empleados para representar la cantidad inicial, interpretar la cantidad extraída, determinar la medida remanente y expresar matemáticamente las relaciones identificadas durante la resolución del problema.

Tabla 21

Procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver una situación de capacidad con fracciones heterogéneas

Aspecto analizado	Evidencias observadas en las producciones estudiantiles	Frecuencia y porcentaje	Interpretación pedagógica
Representación de la cantidad inicial ($1 \frac{3}{4}$ L)	Representación gráfica del litro completo acompañado de tres cuartos de litro.	11 estudiantes (44.0%)	Los estudiantes establecen relaciones entre la unidad y sus particiones, utilizando representaciones que conservan el significado de la magnitud trabajada.
	Representaciones fragmentadas o sin correspondencia clara	4 estudiantes (16.0%)	Se observan dificultades para coordinar la representación gráfica con la estructura fraccionaria de la situación.

	con la cantidad indicada.		
	Omisión de respuesta.	10 estudiantes (40.0%)	Algunos estudiantes aún requieren apoyos para representar magnitudes compuestas mediante fracciones.
Interpretación de la cantidad extraída ($1\frac{1}{2}$ L)	Identificación del entero y transformación de $\frac{1}{2}$ litro en una medida equivalente expresada en cuartos.	6 estudiantes (24.0%)	Las respuestas muestran que algunos alumnos comienzan a utilizar equivalencias para comparar y operar con unidades homogéneas.
	Confusión en la transformación o en la relación entre las fracciones involucradas.	6 estudiantes (24.0%)	Persisten dificultades para coordinar diferentes unidades de medida dentro de una misma situación.
	Omisión de respuesta.	13 estudiantes (52.0%)	La construcción de equivalencias continúa representando un desafío para una parte importante del grupo.
Determinación de la cantidad remanente	Obtención correcta de $\frac{1}{4}$ de litro como resultado final.	8 estudiantes (32.0%)	Los estudiantes logran establecer relaciones entre fracciones equivalentes y utilizar dichas relaciones para determinar la magnitud restante.
	Resultados incorrectos o registros sin relación con la situación planteada.	4 estudiantes (16.0%)	Las respuestas sugieren dificultades en la coordinación de las equivalencias necesarias para resolver el problema.
	Omisión de respuesta.	13 estudiantes (52.0%)	La resolución de situaciones con fracciones heterogéneas continúa en proceso de construcción para parte del grupo.

Expresión matemática de la situación	Escritura de una expresión numérica que representa la operación realizada.	1 estudiante (4.0%)	Se observan indicios de utilización autónoma del lenguaje simbólico para representar relaciones matemáticas.
	Intentos de representación mediante expresiones incompletas o con errores de notación.	4 estudiantes (16.0%)	Los estudiantes comienzan a explorar formas de representar simbólicamente las relaciones identificadas, aunque aún con dificultades de formalización.
	Omisión de respuesta.	20 estudiantes (80.0%)	La construcción de expresiones matemáticas convencionales constituye uno de los aspectos de mayor complejidad dentro de la trayectoria observada.

Los resultados muestran que varios estudiantes lograron transferir relaciones previamente construidas en contextos de longitud hacia una situación de capacidad. Particularmente, las respuestas relacionadas con la representación de $1 \frac{3}{4}$ litros, la transformación de $\frac{1}{2}$ litro en $\frac{2}{4}$ y la determinación de $\frac{1}{4}$ de litro como cantidad restante evidencian el uso de equivalencias como herramienta para resolver problemas. Estas producciones sugieren avances hacia formas de razonamiento más generales, donde las fracciones comienzan a funcionar como relaciones matemáticas que pueden aplicarse en distintos contextos de medida. No obstante, los porcentajes de omisión indican que estos procesos aún se encontraban en consolidación para una parte importante del grupo, especialmente cuando la tarea exigía expresar las relaciones mediante lenguaje simbólico convencional.

La interpretación de la cantidad extraída y la determinación de la medida remanente permitieron observar procedimientos relacionados con el uso de equivalencias entre fracciones. Un ejemplo representativo corresponde a las respuestas de Jesús, como se muestra en el diálogo:

DF: ¿Cuánta agua de sabor teníamos al inicio?

Edgar: Un litro y tres cuartos.

DF: Bien, ¿y con qué vasos podemos representarlo?

Ashly: Con uno de un litro y tres de un cuarto de litro.

DF: (La docente representa los $1 \frac{3}{4}$ de litro en los casos mencionados) ¿Y qué cantidad había que quitar?

Jesús: “1 litro y 1 medio litro”

DF: ¿Y qué vasos puedo utilizar para quitarle esa medida?

Keyler: Uno de litro y dos cuartos (la docente realiza el transvase de la cantidad de agua en las medidas mencionadas).

DF: ¿Qué envases y qué medida exacta quedó en el fondo?

Jesús: “1 cuarto.

Esteban: Un vaso de un cuarto.

Esta producción permite inferir que el estudiante reconoció las relaciones existentes entre las distintas unidades fraccionarias involucradas en la situación. Para determinar la cantidad restante, identificó el litro completo, interpretó el medio litro como una fracción equivalente a dos cuartos y estableció una comparación entre magnitudes expresadas en una misma unidad de referencia. Más que aplicar una regla de manera mecánica, el procedimiento muestra que comenzó a utilizar las equivalencias como herramienta para resolver una situación de medida.

Por otra parte, la resolución conceptual de la resta implicó una reinterpretación numérica del medio litro en el sistema de cuartos. Cuando se analizó el remanente de la sustracción, se generó la siguiente interacción:

DF: Si quitamos primero el litro, ¿qué nos queda?

Esteban, Ashly y Jesús: Tres cuartos.

DF: Ya quitamos el litro. Ahora todavía tenemos que quitar medio litro. ¿Qué hacemos?

Keyler: Quitamos el medio.

DF: ¿Tenemos un recipiente de medio litro dentro de los tres cuartos?

Alumnos: No.

DF: ¿Cuál medida de vaso nos ayuda a restar $\frac{1}{2}$ litro?

Iker: 2 de un cuarto.

Esteban: 1 de medio litro.

DF: ¿Cuánto vale un medio litro en cuartos?

Jesús: Dos cuartos.

DF: Entonces, si nos quedan tres cuartos y quitamos dos cuartos, ¿qué nos queda?

Ashly: Un cuarto.

DF: ¿Un cuarto de qué?

Ashly: De litro.

No obstante, para aquellos estudiantes que manifestaban dudas, la validación empírica a través de representaciones visuales complementó el proceso de institucionalización del resultado formal:

DF: Si alguien todavía tiene dudas, venga para comprobarlo acá al frente.

DF: Tenemos un litro y tres cuartos. Ya quitamos el litro completo. ¿Cuánto nos queda?

Cris: Tres cuartos.

DF: Ahora tenemos que quitar medio litro. ¿Qué creen que va a quedar?

Dulce: Dos cuartos.

DF: ¿Dos cuartos? Vamos a comprobarlo.

(El alumno retira dos recipientes de un cuarto de los tres cuartos disponibles).

DF: ¿Cuántos cuartos quedaron ahora?

Yamileth: Uno.

DF: Entonces, ¿quedaron dos cuartos o un cuarto?

Aurora: Un cuarto.

Otro hallazgo relevante se observó en la producción de Jesús, quien intentó representar simbólicamente la situación mediante la expresión “ $1 \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ ”. Aunque la escritura presenta imprecisiones en la organización convencional de los términos, la presencia de los signos matemáticos y la identificación del residuo final sugieren que el estudiante buscó expresar mediante lenguaje simbólico las relaciones construidas durante la actividad. Este tipo de producciones constituye una evidencia de que algunos alumnos comenzaron a utilizar representaciones numéricas para comunicar procedimientos y resultados, reduciendo progresivamente su dependencia de los materiales concretos utilizados en sesiones anteriores.

Estas evidencias muestran que ciertos estudiantes comenzaron a transferir relaciones construidas en contextos previos hacia nuevas situaciones de capacidad. Las fracciones ya no funcionan únicamente como representaciones asociadas a objetos o materiales específicos, sino también como herramientas para comparar, transformar y comunicar relaciones entre magnitudes. Aunque estos procesos aún se encontraban en consolidación para gran parte del grupo, las respuestas analizadas sugieren avances hacia formas de razonamiento cada vez más generales y autónomas.

Conclusiones

La presente investigación tuvo como propósito analizar el tránsito de la matematización horizontal a la matematización vertical en estudiantes de tercer grado de educación primaria durante la resolución de problemas de suma y resta de fracciones mediante una intervención didáctica fundamentada en la EMR. Los hallazgos obtenidos permiten afirmar que dicho tránsito constituye un proceso gradual de reorganización del pensamiento matemático que emerge cuando los estudiantes tienen la oportunidad de construir significados a partir de situaciones contextualizadas, modelos mediadores y espacios sistemáticos de interacción y reflexión colectiva.

En relación con la pregunta general de investigación, se concluye que el tránsito de la matematización horizontal a la vertical se favorece cuando las actividades propuestas permiten a los estudiantes partir de experiencias comprensibles para ellos, movilizar estrategias personales, contrastarlas con las de sus compañeros y reconstruir progresivamente sus formas de representación. Los contextos de reparto, medición e iteración de unidades funcionaron como escenarios que posibilitaron el surgimiento de relaciones matemáticas cada vez más complejas, permitiendo que las fracciones dejaran de ser concebidas únicamente como particiones de objetos para comenzar a ser comprendidas como magnitudes susceptibles de comparación y transformación.

Los resultados muestran que los estudiantes iniciaron el proceso con concepciones fuertemente influenciadas por el pensamiento del número natural. Aunque reconocían algunas particiones comunes, como la mitad, estas no eran interpretadas necesariamente como relaciones fraccionarias. La persistencia de razonamientos propios de los números enteros confirmó que la comprensión de las fracciones implica una ruptura conceptual que no puede resolverse mediante la enseñanza directa de procedimientos algorítmicos, sino a través de experiencias que permitan resignificar la noción de unidad, medida y relación.

En cuanto a los principios de la EMR que permitieron articular la progresión observada, los resultados ponen de manifiesto la relevancia de la actividad matemática, la realidad, la reinención guiada, la interacción, los niveles de matematización y la interconexión.

Particularmente, la reinención guiada permitió que los estudiantes construyeran procedimientos propios antes de recibir explicaciones formales, mientras que la interacción favoreció procesos de argumentación, validación y confrontación de ideas. En diversos momentos de la intervención los estudiantes corrigieron procedimientos de sus compañeros, defendieron sus propias estrategias y establecieron conversaciones de las relaciones identificadas, reduciendo progresivamente la dependencia de la validación directa de la docente en formación.

Respecto a las estrategias y representaciones utilizadas, los resultados evidencian una evolución desde acciones apoyadas principalmente en materiales concretos hacia formas de representación más estructuradas. Este tránsito no implicó el abandono de las experiencias iniciales, sino su reorganización progresiva en nuevos niveles de comprensión. Particularmente relevante fue la función de los modelos mediadores, los cuales permitieron que las relaciones construidas mediante la manipulación se transformaran gradualmente en referentes internos para comparar magnitudes, establecer equivalencias y resolver problemas sin depender permanentemente del material concreto. Sin embargo, este avance no ocurrió de manera homogénea, ya que coexistieron diferentes niveles de razonamiento dentro del grupo.

En relación con la evolución de los modelos, los hallazgos muestran que los materiales manipulativos desempeñaron un papel fundamental durante las primeras etapas del aprendizaje. No obstante, conforme avanzó la intervención, algunos estudiantes dejaron de depender de ellos para resolver las situaciones planteadas. Las relaciones construidas inicialmente a través de la manipulación comenzaron a funcionar como referentes internos que les permitieron establecer equivalencias, comparar magnitudes y resolver problemas sin necesidad de recurrir constantemente al material concreto. Este resultado es especialmente visible en las sesiones finales, donde varios estudiantes lograron transferir relaciones desarrolladas en contextos de longitud hacia situaciones de capacidad, utilizando las equivalencias entre fracciones como herramientas para interpretar nuevas situaciones.

En este sentido, una de las principales aportaciones de la investigación consiste en mostrar que la matematización vertical no se manifiesta únicamente mediante el uso de símbolos o algoritmos formales. Por el contrario, se expresa en la capacidad de los estudiantes para reconocer relaciones, justificar procedimientos, establecer equivalencias y transferir conocimientos a nuevas situaciones. Desde esta perspectiva, la formalización matemática debe

entenderse como el resultado de un proceso de construcción progresiva de significados y no como un punto de partida de la enseñanza.

Particularmente significativo resulta el hecho de que algunos estudiantes fueran capaces de reconocer que un medio equivale a dos cuartos y utilizar esta relación para resolver situaciones de suma y resta de fracciones heterogéneas. Aunque sólo una minoría logró representar simbólicamente una operación completa con la notación horizontal de la resta de fracciones, este hecho constituye una evidencia importante de aproximación a formas más formales de razonamiento matemático.

En cuanto al cumplimiento de los objetivos planteados, fue posible identificar los saberes previos de los estudiantes, diseñar e implementar una intervención fundamentada en la EMR, analizar las estrategias y representaciones desarrolladas durante las sesiones y valorar los avances observados en los procesos de matematización. Si bien los niveles de formalización alcanzados fueron diversos, las evidencias permiten reconocer avances concretos hacia formas más estructuradas de razonamiento matemático.

Por ello, el supuesto de investigación se confirma parcialmente. Los resultados respaldan la idea de que los contextos significativos y los modelos mediadores favorecen la construcción progresiva de significados asociados a las fracciones y promueven el desarrollo de relaciones matemáticas cada vez más complejas. No obstante, también muestran que la transición hacia formas plenamente formales de razonamiento requiere tiempos prolongados de trabajo, oportunidades continuas de argumentación y experiencias reiteradas de generalización. En consecuencia, el tránsito entre niveles de matematización no puede concebirse como un proceso lineal ni uniforme, sino como una construcción gradual caracterizada por avances, retrocesos y reorganizaciones sucesivas.

Los hallazgos obtenidos respaldan los planteamientos de Freudenthal (1983), al evidenciar que las matemáticas pueden ser reinventadas por los estudiantes cuando se les brinda la oportunidad de explorar situaciones significativas y construir relaciones a partir de su propia actividad. Las fracciones emergieron progresivamente como herramientas para interpretar y resolver problemas, mientras que los modelos utilizados evolucionaron desde representaciones de situaciones concretas hacia instrumentos para pensar matemáticamente. De esta manera, la

investigación aporta evidencias que fortalecen la pertinencia de la ERM como marco para la enseñanza de las fracciones en educación primaria.

Desde una perspectiva de la Investigación-Acción, el estudio también generó transformaciones importantes sobre la comprensión de la enseñanza de las matemáticas. Uno de los principales aprendizajes consistió en reconocer la dificultad que implica abandonar prácticas centradas en la explicación directa para permitir que los estudiantes construyan sus propios significados. Durante el desarrollo de la intervención fue necesario cuestionar constantemente las formas de validación utilizadas en el aula, así como reflexionar sobre el papel del lenguaje docente en la construcción conceptual de las fracciones. En distintos momentos se hizo evidente que ciertas expresiones empleadas por la propia docente en formación podían reforzar interpretaciones asociadas al número natural y limitar la comprensión de las fracciones como magnitudes.

Asimismo, la experiencia permitió reconocer que enseñar fracciones desde una perspectiva realista exige paciencia, flexibilidad y una planificación cuidadosa de situaciones que mantengan continuidad conceptual entre sí. Los resultados muestran que los estudiantes requieren múltiples oportunidades para explorar, justificar, comparar y confrontar ideas antes de consolidar nuevas relaciones matemáticas. Esta conclusión coincide con los planteamientos de Dewey (1998), quien sostiene que el aprendizaje surge de la reflexión sobre la experiencia y que el conocimiento se construye a partir de la interacción activa con las situaciones problemáticas. De igual manera, se relaciona con la perspectiva de Schön (1983) sobre la reflexión en la acción y sobre la acción, ya que durante la implementación fue necesario analizar constantemente las decisiones didácticas tomadas y realizar ajustes en función de las respuestas de los estudiantes. Asimismo, la experiencia desarrollada recupera los aportes de Elliott (2005), quien concibe la investigación-acción como un proceso de mejora de la práctica profesional sustentado en la reflexión sistemática de las situaciones que ocurren en el aula.

Entre las principales limitaciones del estudio se encuentran el tiempo disponible para la implementación de la intervención, la heterogeneidad de los niveles de comprensión presentes en el grupo y las dificultades previas relacionadas con la comprensión de las fracciones. Asimismo, se identificó que algunos estudiantes aún requieren profundizar en la construcción de equivalencias y en la comprensión de fracciones impropias y mixtas. Estas situaciones sugieren

la necesidad de desarrollar secuencias didácticas más extensas que permitan consolidar los avances observados. De igual manera, se reconoce que la diversidad de niveles de matematización presentes dentro de un mismo grupo representa un desafío importante para la práctica docente, ya que demanda formas de acompañamiento y evaluación que permitan reconocer los avances individuales sin perder de vista los procesos colectivos de construcción del conocimiento matemático.

Esta investigación abre nuevas líneas de estudio relacionadas con la evaluación de grupos que presentan diferentes niveles de matematización, la construcción de secuencias didácticas para grados superiores y el análisis de otros contenidos matemáticos desde la perspectiva de la EMR. Los resultados obtenidos permiten concluir que el aprendizaje de las fracciones y de las operaciones con fracciones requiere algo más que la enseñanza de procedimientos algorítmicos; demanda la construcción progresiva de significados, la participación activa de los estudiantes y la generación de espacios donde las ideas matemáticas puedan ser exploradas, justificadas, discutidas y reconstruidas colectivamente.

Finalmente, esta investigación permitió comprender que el aprendizaje de las fracciones y de las operaciones con fracciones constituye un proceso complejo que requiere tiempo, continuidad, discusión y experiencias significativas. También permitió reconocer que la EMR, sustentada en los planteamientos de Freudenthal (1973, 1983) y desarrollada por autores como Gravemeijer (1994, 1999), ofrece una vía pertinente para favorecer la construcción progresiva de significados matemáticos y para transformar la manera en que docentes y estudiantes se relacionan con el conocimiento.

Asimismo, la experiencia confirma la importancia de la reflexión sistemática sobre la práctica planteada por Dewey (1933) y Schön (1983), al evidenciar que comprender cómo aprenden los estudiantes implica, necesariamente, transformar las formas de enseñar. En este sentido, la presente investigación no solo permitió analizar el tránsito de la matematización horizontal a la vertical en el aprendizaje de las fracciones, sino también resignificar la práctica docente como un espacio permanente de indagación, reflexión y mejora.

Los hallazgos obtenidos muestran que la construcción del conocimiento matemático adquiere mayor profundidad cuando los estudiantes participan activamente en procesos de exploración, argumentación y reconstrucción de significados. Por ello, este trabajo reafirma la

necesidad de promover propuestas didácticas que sitúen la comprensión por encima de la mecanización y reconoce a la investigación docente como una vía legítima para transformar la enseñanza desde el interior de las aulas. Se espera que las evidencias aquí construidas aporten al campo de la educación matemática y contribuyan a fortalecer una visión de la enseñanza en la que comprender, reflexionar y reinventar constituyan acciones inseparables del aprendizaje.

Referencias

- Alagia, H., Bressan, A., & Sadosky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Libros del Zorzal. <https://www.delzorzal.com/>
- Alsina, Á., & Salgado, M. (2018). *Prácticas de medida en Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista*. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 7(2), 24–37. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/practicas-de-medida-en-educacion-infantil-desde-la-perspectiva-de-la-educacion-matematica-realista/>
- Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico: Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (J. Babini, Trad.). Siglo XXI Editores. (Obra original publicada en 1938).
- Bressan, A., Bogisich, S., & Crego, K. (2000). *Los principios de la educación matemática realista*. Consejo Provincial de Educación de Río Negro. <https://eduteka.icesi.edu.co/>
- Butto Zarzar, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos*, 15(1), 33–45.
- Calderón Castañeda, M. A. (2022). Formas de representación matemática en el aprendizaje de fracciones de los estudiantes del cuarto grado de primaria. *Revista de Investigación e Innovación Científica y Tecnológica GnosisWisdom*, 2(3), 70–84. <https://doi.org/10.54556/gnosiswisdom.v2i3.47>
- De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning: Teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences*. Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomputercentrum, Utrecht University.
- Dewey, J. (1998). *¿Cómo pensamos?* Paidós.
- Delgado Valdez, I. A., & Aguayo Rendón, L. M. (2024). La constitución de objetos mentales sobre la fracción impropia: Un experimento de diseño desde la Educación Matemática Realista. *Educación Matemática*, 36(3), 37–63. <https://doi.org/10.24844/EM3603.02>
- Elliott, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Morata.

- Fandiño Pinilla, M. I. (2014). *Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. Magisterio.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing Company.
<https://link.springer.com/book/10.1007/94-010-2905-2>
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company. <https://link.springer.com/book/10.1007/90-277-1535-0>
- González Balderas, R. O., Luna de la Rosa, C. J., & Loera Serrano, S. (2022). *Aplicación de una trayectoria hipotética de aprendizaje para identificar los conocimientos de los profesores de educación primaria para la enseñanza de las fracciones en el contexto de medida*. Centro de Actualización del Magisterio en Zacatecas.
- González-Forte, J. M., & Fernández, C. (2024). Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales. *PNA*, 18(2), 131–160. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27218>
- Gravemeijer, K. P. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Freudenthal Institute.
<https://fisme.science.uu.nl/toepassing/en/22026/>
- Gravemeijer, K. P. (1999). *How emergent models may foster the constitution of formal mathematics*. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155-177.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4
- Guerreiro, A., y Martínez-Jiménez, E. (2025). Aprendiendo el modelo parte-todo de las fracciones a partir de una tarea con banderas del mundo. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, 35, 117–138.
<https://fisme.science.uu.nl/toepassing/en/00080/>
- Hurtado Moreno, C. A., Cortés Monroy, J. S., & Mendoza Yela, R. F. (2019). *Una aproximación al aprendizaje de los fraccionarios como relación parte-todo mediante una propuesta de aula para el grado tercero de educación básica*. En *Memorias de la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM-IACME)*, Medellín, Colombia.

- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2020). *Censo de Población y Vivienda 2020*. <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/2020/>
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2019). *PLANEA 2018. Resultados nacionales de lenguaje y comunicación y matemáticas en educación básica*. INEE.
- Kemmis, S. y McTaggart, R., (1992) *¿Cómo planificar la investigación-acción?* Laertes.
- Latorre, A. (2005). La investigación-acción. En *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa* (pp. 23-38). Graó, de IRIF, S.L. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2019/07/La-investigacion-accion-conocer-y-cambiar-la-practica-educativa.pdf>
- Lázaro Guillermo, J. C., Guitton Lozano, E., Pérez Marín, J. L., Barreda Fachin, M. J. C., Peña Pasmíño, R. W., & Yon Delgado, J. C. (2024). *Teoría matemática realista de Hans Freudenthal: Didáctica y paradigmas de la investigación*. Editorial Mar Caribe. <https://editorialmarcaribe.es/teoria-matematica-realista-de-hans-freudenthal-didactica-y-paradigmas-de-la-investigacion/>
- Llinares Ciscar, S., & Sánchez García, V. (1997). *Fracciones: La relación parte-todo*. Síntesis.
- Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- OCDE. (2023). *Resultados de PISA 2022: México*. <https://www.oecd.org>
- Reséndiz Balderas, E., & González Salazar, C. A. (2018). Enseñanza de fracciones en tercer grado de primaria: Análisis del discurso y prácticas pedagógicas. *SOCIOTAM: Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades*, 28(1), 109–138.
- Sanjuán, E. (2021). Estrategias de resolución de problemas de división-medida y división reparto con fracciones por estudiantes de Educación Primaria. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 77–91. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.77-91>
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books. https://raggeduniversity.co.uk/wp-content/uploads/2025/03/1_x_Donald-A.-Schon-The-R

eflective-Practitioner -How-Professionals-Think-In-Action-Basic-Books-1984_redactedada_compressed3.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2022). *Plan de Estudio para la Educación Preescolar, Primaria y Secundaria 2022*. Dirección General de Desarrollo Curricular.

Secretaría de Educación Pública. (2024). *Programa de estudio para la educación primaria: Programa sintético de la fase 4*. Gobierno de México. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_4.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2025). *Ejercicios Integradores del Aprendizaje (EIA 02, Fase 4: 3.º y 4.º de primaria, Día 2)*. Gobierno de México. https://ejerciciosintegradores.sep.gob.mx/storage/recursos/2025_01/EIA/iK9PspvBWj-2025_EIA_F4-02.pdf

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Kluwer Academic Publishers. <https://link.springer.com/book/10.1007/94-015-7931-1>

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction — The Wiskobas Project*. Reidel Publishing Company. <https://link.springer.com/book/10.1007/90-277-2365-5>

Valenzuela García, C., Figueras, O., Arnau Vera, D., & Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 1–20.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). *The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage*. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9–35. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc>

Vasilachis de Gialdino, I. (2006). Investigación cualitativa. En I. Vasilachis de Gialdino (Ed.), *Estrategias de investigación cualitativa* (pp. 23-64). Gedisa.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Zolkower, B., & Bressan, A. (2012). Educación matemática realista. En M. D. Pochulu & M. A. Rodríguez (Compils.), *Educación matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (Vol. 1) (pp. 175-200). Universidad Nacional de General Sarmiento; Editorial Universitaria Villa María. <https://ediciones.ungs.edu.ar/>

Anexos

Anexo A. Examen de LEIREM

16. Arturo tenía 100 canicas y en un juego perdió 27. ¿Cuántas canicas le quedan?

- A) 78
- B) 75
- ☒ C) 73
- D) 77



17. En un alambre había 25 urracas, después llegaron 18 urracas más, ¿cuántas urracas hay en total en el alambre?

- A) 58
- B) 53
- C) 56
- ☒ D) 43

19. ¿Cuál es el número que falta en la suma para completar 200?

$$72 + 38 + 27 + 23 + \underline{\hspace{2cm}} = 200$$

- A) 40
- ☒ B) 50
- C) 30
- D) 60

 Analiza la tabla

Recipiente	Unidad de medida	Capacidad
		
		

10. ¿Por qué el primer recipiente tiene una capacidad de 10 unidades de medida y el segundo de cinco unidades de medida?

- A) Porque la capacidad depende del tamaño de la unidad de medida y la segunda unidad de medida es el doble de grande que la primera.
- B) Porque la capacidad depende del tamaño del envase y el segundo recipiente es el doble de grande que el primero.
- C) Porque la capacidad depende de la forma del recipiente y los recipientes tienen diferente forma.
- D) Porque la capacidad depende del material con el que se llena el recipiente y el segundo, se llenó con pelotas y el primero con lentejuelas.

11. ¿Cuál de los siguientes recipientes tiene mayor capacidad que un litro?



Anexo B. Ejercicio Integrador de Aprendizaje (EIA) (F4-02) (4a1-4b1)

Fase 4

Luis ha observado que, ante la falta de agua, las personas la guardan en diversos recipientes, los cuales contienen diferente cantidad de agua de acuerdo con su tamaño.

Observa con cuidado las siguientes equivalencias.

 = 1 Litro



=



10 botellasUna cubeta



=



10 cubetasUn tambor

4. Luis, Dana, Teresa y Felipe juntaron agua en su casa.

Luis



Dana



Teresa



Felipe



a) Cuenta y registra en la tabla lo que se te pide.

Nombre	Tambos		Cubetas		Botellas		Total de agua en litros
	Cantidad	Agua en litros	Cantidad	Agua en litros	Cantidad	Agua en litros	

c4a1

b) A partir de los resultados que pusiste en la tabla, responde lo siguiente:

- ¿Quién tiene menos agua? ¿Por qué?

Instrumento de diagnóstico.

Parto y reparto

Nombre del estudiante: _____

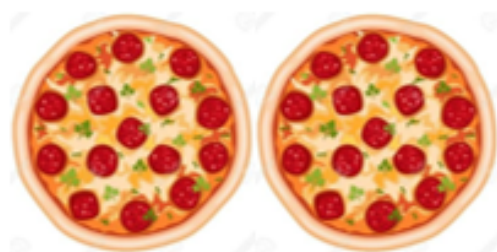
Indicaciones:

Resuelve los problemas utilizando dibujos, números y explicaciones cuando sea necesario.

- **La pizza compartida**

El papá de María compró 2 pizzas grandes para que María y sus siete amigas puedan comer. Todas quieren comer la misma cantidad de pizza para que sea justo.

Dibuja cómo repartirías las 2 pizzas entre las 8 niñas para que cada una tenga la misma cantidad de pizza.



Pizza 1

Pizza 2

1. ¿En cuántas partes se partió cada pizza? ¿Cuántas rebanadas de pizza le tocó a cada quién?

2. ¿Sobró pizza? ¿Qué cantidad?

- **El pastel de cumpleaños**

Hoy es el cumpleaños de Juan, su mamá cortó el pastel en 12 rebanadas iguales, pero solo fueron 4 de sus amigos, así que a cada uno le dio 2 rebanadas de pastel.

Dibuja las rebanadas en las que se cortó el pastel y colorea la parte del pastel que se comieron los 4 amigos de Juan.



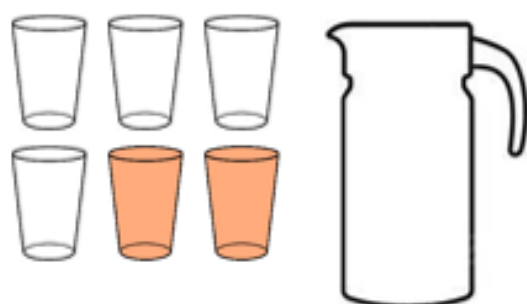
3. ¿Cuántas rebanadas se comieron en total los 4 amigos de Juan?

4. ¿Cuántas rebanadas de pastel sobraron?

- **Los vasos de agua**

Es un día caluroso y estás organizando un picnic con tus amigos. Tienes una jarra de agua de melón que puede llenar 6 vasos iguales y ya has servido 2 vasos para tus amigos.

Si la jarra completa representa 6 vasos, colorea la cantidad de agua que queda en la jarra después de servir 2 vasos.



5. ¿Qué cantidad de agua sobra en la jarra?

• **Reparto de chocolates**

José compró dos paquetes de chocolates, cada paquete trae 12 chocolates, y los quiere repartir entre sus 6 sobrinos de manera que a todos les toque la misma cantidad.

Encierra los chocolates que le tocan a cada sobrino.



6. ¿Cuántos chocolates recibe cada uno?

7. ¿Cómo repartiste los chocolates entre los sobrinos de José?

• **El rectángulo de colores**

La maestra Flor encargó a sus alumnos hacer la portada de la libreta de tareas de tres colores. Una cuarta parte de color rojo, dos cuartas partes de color azul y una cuarta parte de color amarillo.

Dibuja cómo se vería la portada de la libreta según las indicaciones de la maestra.



8. ¿Cuánto espacio de la portada ocupó el color amarillo?

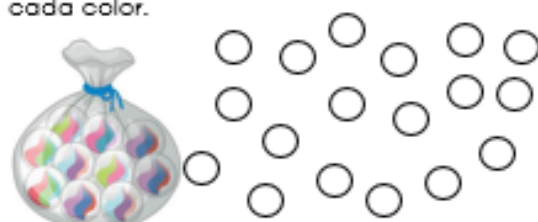
9. ¿Qué color ocupa más espacio en la portada?

10. ¿Cuánto espacio de la portada ocupa el color azul?

• **El grupo de canicas**

En una bolsa hay 18 canicas de tres colores diferentes: rojas, azules y verdes.

Colorea las 18 canicas de manera que haya la misma cantidad de canicas de cada color.



11. ¿Cuántas canicas hay de cada color?

12. ¿Qué parte del total son las canicas de cada color?

• La fila del recreo

La maestra formó a sus 20 estudiantes en una fila para formar equipos. Todos los equipos tienen la misma cantidad de integrantes y cada equipo tiene un integrante con la cachucha de color rojo. Encierra los equipos que se pueden formar.



13. ¿Cuántos equipos se pudieron formar?

14. ¿De cuántos integrantes es cada equipo?

• Compartiendo pelotas

El maestro de educación tiene 9 pelotas para 3 equipos. Ayúdale a repartirlas de manera que todos los equipos tengan la misma cantidad de pelotas.

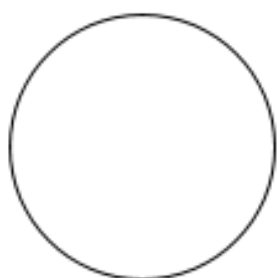


15. ¿Qué parte de las pelotas le corresponde a cada equipo?

• Rebanadas de pizza

Luis compró una pizza de 8 rebanadas para compartirla con sus amigos por la tarde, pero le dio mucha hambre y decidió comerse tres rebanadas.

Representa las 8 rebanadas de la pizza y colorea las 3 que se comió Luis.



16. ¿Qué parte de la pizza se comió Luis?

17. ¿Qué parte de la pizza les dejó a sus amigos?

- **Un chocolate**

María tiene una barra de chocolate que parte en 4 partes iguales para compartirlo con sus amigos, ella se come 1 parte.

Dibuja cómo repartió la barra de chocolate María y colorea la parte que se comió.



18. ¿Qué parte del chocolate se comió María?

- **La recta**

Una rana intentó pasar de un lado del río al otro de un solo brinco, pero no lo logró, se dio cuenta que le faltó medio salto más del que había dado.

Marca en la línea de abajo la mitad del brinco de la rana y, después, marca hasta donde debió haber saltado la rana para pasar el río.

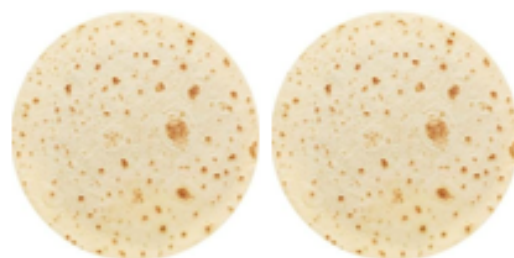


- **¿Es más que...?**

Ana tomó una tortilla y la partió en cuatro partes iguales, después se comió dos de esas partes. Luego tomó otra tortilla, la partió en dos partes iguales y se comió una de estas partes.

Ana piensa que comer dos cuartas partes de la tortilla es más que comer media tortilla.

Ayúdale a Ana a representar las tortillas para comprobar si lo que dice es verdad.



19. ¿Dos cuartas partes representan más que un medio o representan la misma cantidad?

- **El tiempo del partido**

Una partida de un videojuego dura la tercera parte de una hora.

20. ¿Cuántos minutos dura una partida?

21. ¿Cuántas partidas se pueden jugar en 1 hora y 40 minutos?

22. Explica cómo lo supiste.

- **Entrevista**

1. ¿Qué entiendes por un medio?

Dibuja un medio

Representa un medio y la mitad de un medio juntos.

Ahora representa la mitad de ese medio.

Anexo D. Secuencia didáctica

Secuencia didáctica. "El Laboratorio de las Medidas Perdidas"

La presente propuesta de intervención pedagógica se fundamenta en los lineamientos curriculares de la Nueva Escuela Mexicana, articulándose en la Fase 4 correspondiente al 3° de Educación Primaria

Campo Formativo: Saberes y Pensamiento Científico.

Contenidos:

- Estudio de los números.
- Suma y resta, su relación como operaciones inversas.

Procesos de Desarrollo de Aprendizaje (PDA):

- Identifica la unidad de referencia en representaciones de medios, cuartos, octavos y dieciseisavos que expresan el resultado de mediciones y repartos.
- Propone expresiones aditivas equivalentes de medios, cuartos u octavos.
- Resuelve problemas de suma o resta vinculados a su contexto, que impliquen el uso de fracciones (medios, cuartos, octavos, dieciseisavos), con el apoyo de material concreto o representaciones gráficas.

Propósito: Favorecer el tránsito de la matematización horizontal a la vertical en alumnos de tercer grado de primaria, mediante el diseño y la aplicación de una secuencia didáctica basado en la Educación Matemática Realista (EMR), enfocado en las operaciones de suma y resta con fracciones (medios, cuartos y octavos) dentro de los contextos de longitud y capacidad.

SESIÓN 1: La emergencia de la unidad de referencia

Propósito de la actividad: La identificación y construcción de la unidad de referencia a través del modelo físico del plegado. Esta sesión busca que los estudiantes transiten de la percepción intuitiva del "todo" a la construcción procedimental de fracciones (medios, cuartos, octavos) mediante la manipulación de magnitudes lineales.

Situación problemática: "El laboratorio de las medidas perdidas"

"En nuestra mesa de trabajo hemos perdido las reglas y metros graduados tradicionales, y solo nos quedan unos listones largos de diferentes colores. El maestro nos ha pedido medir varios objetos

del salón, pero algunas medidas exactas se han perdido y necesitamos fabricar nuestras propias herramientas doblando y partiendo estos listones. Si para solucionar el misterio necesitamos obtener partes más pequeñas como la mitad, la mitad de la mitad o pedazos aún menores, ¿cómo podemos doblar y cortar con total seguridad para que todos en el salón obtengamos exactamente el mismo tamaño al medir, sin importar el color del listón que usemos?"

Pregunta detonadora: "Si al medir un objeto un compañero dice que tu resultado está mal porque usaste '3 pedazos', pero tus pedazos son de colores y tamaños diferentes, ¿qué le dirías para explicarle por qué no se pueden contar simplemente como 1, 2 y 3?"

Preguntas guía:

- "¿Cómo puedes probar, sin lugar a dudas, que este listón que doblaste es realmente la mitad de tu unidad de referencia inicial?"
- "Al comparar el listón que dividiste en más partes con el listón completo, ¿qué nombre le das a cada una de esas nuevas partes?"
- "Si un compañero duda del tamaño de tu listón cortado, ¿qué demostración física o argumento matemático puedes hacer para convencerlo?"

Materiales:

- Tiras de papel de 1 metro de largo (un color neutro para la unidad de referencia y 4 colores para las subdivisiones).
- Instrumento de registro: "Mi laboratorio de medidas".

SESIÓN 2: La adición de fracciones como concatenación de magnitudes

Propósito de la actividad: Que los alumnos reconozcan la adición de fracciones no como un algoritmo abstracto, sino como la unión física (concatenación) de magnitudes lineales. La sesión busca que el alumno descubra por sí mismo la necesidad de la equivalencia (la transformación de una tira en otra) para poder cuantificar el resultado de la suma.

Situación problemática: "El misterio de las medidas perdidas"

"En nuestro laboratorio de medidas seguimos sin reglas graduadas y algunas de las tiras largas completas se han perdido. Ahora tenemos que medir y armar una longitud más grande uniendo dos

secciones, pero estamos obligados a usar únicamente los listones que nosotros mismos fabricamos. El gran reto es que debes elegir dos de tus medidas diferentes y juntarlas para hacer una sección más larga. ¿Cómo podemos dar un resultado único si los dos listones tienen tamaños y colores distintos? ¿Qué pasa si un compañero duda de tu medida total porque ve pedazos desiguales?"

Pregunta detonadora: "Al juntar tus dos listones de diferente tamaño, si un compañero te pregunta por qué no puedes simplemente decir que tienes '2 pedazos' o inventar otra fracción, ¿qué le explicarías sobre el tamaño de tus listones?"

Preguntas guía:

- "¿Qué nombres tienen los dos listones que elegiste sumar de tu set de medidas creadas?"
- "¿Cómo lograste saber cuánto miden los dos juntos? ¿Tuviste que cambiarlos o superponerlos por piezas más pequeñas de tus otros listones para unificar el tamaño?"
- "¿Qué relación matemática descubriste entre tus listones al hacer este cambio? (Por ejemplo: mi listón de ____ es igual a ____ listones de ____)."

Materiales:

- Set de listones de fracciones fabricados por los alumnos en la Sesión 1.
- Lápiz y colores para el registro gráfico.
- Instrumento de registro: "Mi ruta de la suma".

SESIÓN 3: La adición de fracciones como concatenación de magnitudes y la emergencia de las equivalencias.

Propósito de la actividad: Que los estudiantes reconozcan la adición de fracciones no como un algoritmo abstracto, sino como la unión física de magnitudes lineales. La sesión busca que el alumno descubra por sí mismo la necesidad de la equivalencia (la transformación de una tira en otra) para poder cuantificar el resultado de la suma.

Situación problemática: "El desafío de la medida faltante"

En nuestro laboratorio de trabajo necesitamos registrar una longitud nueva y desconocida. Para obtenerla, debemos unir una sección que mide exactamente $\frac{1}{2}$ de metro con una tira nueva de $\frac{1}{4}$ de metro. Sin embargo, no tenemos una tira única que mida el tamaño de esta nueva sección total

de papel. ¿Qué tan larga será la nueva medida que acabamos de formar? ¿Cómo podemos acomodar y transformar nuestras tiras disponibles para descubrir el tamaño exacto y convencer a los demás de nuestro resultado?

Pregunta detonadora: "Al juntar la pieza de $\frac{1}{2}$ y la de $\frac{1}{4}$, si un compañero dice que el resultado de juntarlas es '2 piezas' o $\frac{1}{6}$, ¿cómo le demostrarías usando tus tiras que eso no es correcto?"

Preguntas guía:

- "¿Qué tuviste que hacer con las tiras para poder medir el total? Explica detalladamente tu estrategia."
- "¿Cómo llamarías a esta nueva medida total obtenida? ¿Qué nombre le darías?"
- "Si tuvieras que cambiar la tira de $\frac{1}{2}$ por piezas más pequeñas para poder contar el total junto con la de $\frac{1}{4}$, ¿cuántas piezas de las pequeñas necesitarías?"

Materiales:

- Set de tiras de fracciones (enteros, medios, cuartos y octavos).
- Instrumento de registro: "Construyendo otra medida".

SESIÓN 4: El modelo de superficie como mediador para la consolidación de las equivalencias.

Propósito de la actividad: Que los estudiantes consoliden el concepto de equivalencia fraccionaria mediante la transición del modelo lineal (tiras) al modelo de superficie o bidimensional (áreas cuadradas). Este cambio de contexto fenomenológico permite que el alumno valide que la misma porción de una unidad de referencia puede representarse con diferentes particiones.

Situación problemática: "La disputa por el terreno"

"Dos vecinos heredaron un terreno rectangular idéntico. El vecino A reclama que su parte es mayor porque a él le dieron 4 partes de 8 ($\frac{4}{8}$). El vecino B reclama que su parte es mayor porque a él le dieron 2 partes de 4 ($\frac{2}{4}$). Ambos terrenos tienen exactamente el mismo tamaño, pero los vecinos están en disputa. ¿Cómo podemos demostrar matemáticamente quién tiene más terreno o si realmente tienen la misma cantidad?"

Pregunta detonadora: "¿Es posible que un vecino tenga más terreno que otro si sus fracciones se escriben con números diferentes? ¿Qué argumento usarías para convencer a los vecinos de que el reparto fue justo o injusto?"

Preguntas guía:

- "Si el vecino A dice que $\frac{4}{8}$ es más grande que $\frac{2}{4}$ porque el 8 y el 4 de sus números son mayores, ¿cómo le explicarías su error basándote en la comparación de las cuadrículas coloreadas?"
- "¿Qué relación matemática o truco descubriste entre los números de abajo (denominadores 4 y 8) y los números de arriba (numeradores 2 y 4) que te permitió comprobar que valen lo mismo?"
- "Si tuvieras que escribir una regla general para que otros niños sepan cuándo dos fracciones que se escriben diferente representan la misma cantidad de superficie, ¿qué regla escribirías?"

Materiales:

- Instrumento de registro: "La sentencia del juez matemático".

SESIÓN 5: El proceso de ajuste mediante el fraccionamiento de la unidad

Propósito de la actividad: Que los estudiantes resuelvan problemas de cuantificación de magnitudes lineales donde la medida exacta no coincide con las unidades de referencia mayores (como el medio). El alumno se ve en la necesidad de fraccionar para ajustar el espacio sobrante mediante subunidades más pequeñas (cuartos u octavos). Esto promueve que los estudiantes transiten de la manipulación e identificación por colores a una relación lógica-matemática formal.

Situación problemática: "El misterio de la medida y el espacio sobrante"

"En nuestro laboratorio de medidas tenemos un listón cuya longitud exacta desconocemos. Al intentar medirlo con nuestras herramientas, nos damos cuenta de que es más chico que la tira de un medio, pero no sabemos exactamente cuánto mide. Para resolver el misterio, necesitamos rellenar o ajustar ese espacio sobrante utilizando nuestras tiras de colores más pequeñas. ¿Cómo podemos descubrir el tamaño exacto del listón combinando estas piezas menores y qué nombre matemático le daremos al total para que cualquier persona entienda la medida exacta?"

Pregunta detonadora: "Si un compañero dice que tu listón mide simplemente 'tres pedazos', ¿por qué esta respuesta no sirve para dar una medida exacta? Explica qué pasa con los tamaños de los pedazos si solo los contamos sin decir su nombre fraccionario o su color."

Preguntas guía:

- "¿Qué tiras pequeñas utilizaron para medir el espacio sobrante de la longitud querida?"
- "¿Cuántas de esas tiras pequeñas cupieron exactamente en el espacio?"
- "Explica paso a paso: ¿Qué hicieron físicamente con sus tiras para descubrir el tamaño exacto del listón?"
- "¿Qué nombre o relación matemática le darían finalmente a la longitud total de este soporte? ¿Por qué?"

Materiales:

- Set de listones de fracciones del alumno (entero, medios, cuartos y octavos).
- Instrumento de Registro: "El misterio del soporte"

SESIÓN 6: La ruptura de la barrera de la unidad y las diferentes maneras de representar una misma medida mayor al entero.

Propósito de la actividad: Confrontar al estudiante con resultados aditivos que exceden el entero o la primera unidad de referencia. Se busca observar cómo el estudiante gestiona la coexistencia de unidades completas y partes fraccionarias, donde descubre que una misma longitud que supera el metro puede registrarse y nombrarse de dos formas distintas.

Situación Problemática: "El Camino Largo de la Hormiga"

"Una hormiga exploradora está recorriendo un camino lineal en el aula. En la primera etapa recorrió $\frac{3}{4}$ de metro y se detuvo a descansar. Después, avanzó otro $\frac{1}{2}$ metro más. ¿Qué distancia total ha recorrido la hormiga desde el punto de inicio? Si nuestras tiras de referencia individuales solo miden un metro, ¿cómo podemos representar y nombrar esta distancia total que ha superado el tamaño de nuestra tira principal?"

Pregunta Detonadora: "Al juntar los $\frac{3}{4}$ y el $\frac{1}{2}$, nos damos cuenta de que el camino es más largo que nuestra tira de un metro. ¿Cómo podemos llamar a esta cantidad si ya no cabe en 'un solo' entero?"

Preguntas Guía:

- "Si dices que el resultado es 1 metro y $\frac{1}{4}$, ¿cómo puedes probar físicamente que ese $\frac{1}{4}$ es lo que sobra del primer metro?"
- "¿Por qué algunos compañeros dicen que el resultado es $\frac{5}{4}$ y otros dicen que es 1 metro y $\frac{1}{4}$? ¿Son cantidades diferentes o son la misma medida? ¿Cómo lo demuestras usando tus tiras?"
- "¿Qué transformación tuviste que hacer con la tira de $\frac{1}{2}$ para poder contar cuántos 'cuartos' había en total en todo el camino?"
- "Ese cuarto que te sobró, ¿cuenta desde el inicio o es un cuarto nuevo? ¿Cómo lo escribirías para que alguien sepa que ya pasaste del metro 1?"

Materiales:

- Juegos de tiras de fracciones.
- Instrumento de Registro: "Superando la Unidad".

SESIÓN 7: La variación de longitudes y la descomposición aditiva mediante combinaciones equivalentes.

Propósito de la actividad: Que el estudiantado consolide la flexibilidad del pensamiento fraccionario a través de la descomposición aditiva de longitudes variadas. Que el alumno reconozca que una misma medida exacta puede ser reconstruida utilizando distintas combinaciones de piezas (medios, cuartos, octavos), promoviendo la transitividad y la descontextualización numérica al exigir argumentos escritos sobre la necesidad de subunidades homogéneas.

Situación Problemática: "El Desafío de las Longitudes Variadas"

"En nuestro laboratorio de medidas hemos recibido un encargo urgente: necesitamos diseñar tres tramos con longitudes muy precisas ($\frac{2}{4}$ de metro, $\frac{5}{8}$ de metro y $1\frac{1}{2}$ de metro). Como varias de nuestras tiras originales se han perdido, el gran reto de nuestro equipo es descubrir 3 formas distintas y equivalentes de construir cada una de las nuevas longitudes solicitadas. ¿Cómo

podemos combinar, sobreponer y probar libremente las tiras de papel para que las tres formas midan exactamente lo mismo?"

Pregunta Detonadora: "Para construir la medida de $\frac{5}{8}$ de metro, ¿sería posible usar únicamente tiras de $\frac{1}{4}$ de metro? ¿Por qué se vuelven totalmente necesarias las piezas más pequeñas para alcanzar esa longitud exacta?"

Preguntas Guía:

- "Al experimentar sobreponiendo tus tiras, ¿cuántas piezas usaron y de qué tamaño o fracción eran para completar la Forma A, B y C de cada tramo?"
- "Al armar el soporte largo de $1\frac{1}{4}$ metros, ¿qué estrategia usaron para cubrir el espacio que pasaba del primer metro entero? Justifica tu respuesta."
- "Si cambias un cuarto por dos octavos en una de tus combinaciones, ¿la longitud total cambia o se mantiene igual? ¿Cómo lo compruebas?"

Materiales:

- Sets de tiras de fracciones (enteros, medios, cuartos, octavos).
- Instrumento de Registro: "Variación de Longitudes y Combinaciones".

SESIÓN 8: La sustracción de fracciones como remoción de magnitudes y el ajuste por transformación.

Propósito de la actividad: Que el estudiantado reconozca la sustracción de fracciones no como una resta algorítmica abstracta, sino como la acción física de quitar, recortar o remover una magnitud lineal a partir de una longitud inicial dada. La sesión busca que el alumno descubra la necesidad de la transformación y la equivalencia cuando se restan partes heterogéneas (cuartos y medios).

Situación Problemática: "El Desafío del Exceso y la Medida de Ajuste"

"En nuestro laboratorio de medidas tenemos un listón de papel largo que mide exactamente $1\frac{1}{4}$ de metro. Sin embargo, al revisar las medidas que necesitamos, nos informan que el listón real debe medir únicamente $\frac{1}{2}$ metro. ¡Nos ha sobrado material! Necesitamos averiguar qué cantidad

exacta debemos cortar y retirar (restar) del listón original usando nuestras tiras de referencia para no echar a perder el material."

Pregunta Detonadora: "Si el ayudante del laboratorio dice que si a $1 \frac{1}{4}$ le quitamos $\frac{1}{2}$ el resultado es $1 \frac{1}{4}$ porque 'restó los números de abajo', ¿cómo le demostrarías con tus tiras que su cálculo es incorrecto y arruinaría la medida?"

Preguntas Guía:

- "¿Cómo utilizaste tus tiras de fracciones para saber qué cantidad exacta de material le sobraba al listón original?"
- "Al realizar el plano visual, ¿cómo marcaste la parte que se necesita y el pedazo sobrante que se debe cortar?"
- "¿A cuántos cuartos equivale la pieza de $\frac{1}{2}$ metro que te piden retirar?"

Materiales:

- Juegos de tiras de fracciones.
- Instrumento de Registro: "El Ajuste del Pasamanos"

SESIÓN 9: La medición de macro-longitudes y el uso adaptativo de unidades y subunidades de medida.

Propósito de la actividad: Que el estudiantado transfiera las nociones aditivas y de equivalencia a la medición de objetos reales de grandes dimensiones en el aula. El alumno se enfrenta a la necesidad de coordinar unidades mayores (enteros o medios) para cubrir distancias largas de forma eficiente, combinándolas con subunidades menores (cuartos u octavos) para ajustar la medida, logrando un tránsito hacia la matematización vertical mediante la justificación de equivalencias aditivas.

Situación Problemática: "El Desafío de las Medidas en el Aula"

"En nuestro laboratorio de trabajo hemos recibido el encargo de encontrar la medida exacta de tres estructuras fijas y muy importantes de nuestro salón. Para cumplir este encargo, seguiremos utilizando de forma exclusiva nuestras tiras y listones de papel. Tendremos que medir con mucha precisión, uniendo las tiras una tras otra en el piso o la pared para descubrir la longitud de cada

zona. ¿Cómo podemos organizar nuestras herramientas para medir distancias grandes sin equivocarnos y qué combinaciones de tiras nos sirven para registrar el tamaño final completo?"

Pregunta Detonadora: "Al medir objetos tan grandes como el pizarrón o la puerta, ¿qué tiras o listones les convino usar al inicio para avanzar más rápido? ¿Y qué hicieron para medir el cachito que faltaba al final?"

Preguntas Guía:

- "Si un equipo midió la puerta usando únicamente listones pequeños y otro equipo usó listones grandes combinados, ¿por qué ambos resultados pueden ser correctos si se escriben de forma diferente?"
- "Al acomodar sus listones sobre los objetos del aula, ¿qué otra combinación de listones podría medir exactamente lo mismo que la primera opción que anotaron?"
- "¿Cómo logran registrar la medida final completa del objeto combinando enteros y partes fraccionarias?"

Materiales:

Juegos de tiras de fracciones (enteros, medios, cuartos, octavos).

Instrumento de Registro: "Medición de Grandes Objetos en el Aula".

SESIÓN 10: La transferencia del pensamiento fraccionario a la magnitud de capacidad mediante equivalencias volumétricas libres.

Propósito de la actividad: Que el estudiantado transfiera y generalice los esquemas de descomposición aditiva y equivalencia construidos previamente en magnitudes lineales (tiras) hacia una nueva magnitud continua: la capacidad. A través de la EMR, el alumno utiliza envases e intercambia sus tamaños de forma física para alcanzar metas volumétricas exactas. Esta sesión promueve el nivel superior de matematización vertical al independizar el concepto de fracción de un solo material físico, consolidándolo como una relación lógica de medida compartida.

Situación Problemática: "El Misterio de los Envases y las Metas de Capacidad"

"En nuestro laboratorio de medidas hemos perdido las jarras graduadas tradicionales y necesitamos encontrar la medida exacta para llenar un tazón principal hasta tres metas de capacidad muy

precisas: $\frac{1}{2}$ de litro, $\frac{3}{4}$ de litro y 1 litro completo. Para este desafío, tenemos total libertad de elegir nuestras herramientas y combinar los envases de tamaños fraccionarios. El gran reto de nuestro equipo es descubrir 3 formas distintas y equivalentes de armar cada una de las metas en el tazón principal. ¡Experimenten libremente intercambiando envases y anoten qué usaron!"

Pregunta Detonadora: "Al comparar tus tres formas de armar una misma meta, ¿por qué si usaron botes o tamaños diferentes el agua llegó exactamente al mismo nivel en el tazón? Explica qué pasó."

Preguntas Guía:

- "Si decidieran cambiar uno de sus envases grandes por envases más pequeños, ¿qué pasa con la cantidad total de piezas que necesitan para que no varíe la medida? Justifica tu respuesta."
- "Al escribir en cada recuadro de la tabla, ¿cuántos envases usaron y de qué tamaño o fracción eran para alcanzar la meta exacta en la Forma A, B y C?"
- "Si dos recipientes de un cuarto se vacían en el tazón, ¿a qué envase de los más grandes equivale esa misma altura de agua?"

Materiales:

- Set de envases fraccionarios de capacidad (botes identificados como enteros, medios, cuartos y octavos de litro).
- Instrumento de Registro: "Libertad de Medida y Combinaciones"

SESIÓN 11: La sustracción de capacidades heterogéneas que superan la unidad mediante el ajuste de equivalencias volumétricas.

Propósito de la actividad: Que el estudiantado resuelva problemas de sustracción con números fraccionarios en magnitudes de capacidad cuando las cantidades involucren enteros y partes heterogéneas (cuartos y medios). La sesión busca que el alumno utilice sus envases como un "modelo para" representar el remanente físico y descubra la necesidad de la equivalencia para restar las fracciones.

Situación Problemática: "El Misterio del Residuo en la Jarra"

"En nuestro laboratorio de medidas preparamos una jarra con exactamente $1 \frac{3}{4}$ litros de agua para realizar las actividades del día. Al terminar las tareas, revisamos el tazón y notamos que se consumieron exactamente $1 \frac{1}{4}$ litros de agua. ¡Ha quedado un residuo atrapado en el fondo de la jarra! Necesitamos averiguar qué cantidad exacta de agua quedó en el fondo. Demuéstralo vaciando, retirando las cantidades correspondientes con tus botes y midiendo el remanente."

Pregunta Defonadora: "Un ayudante del laboratorio dice que el resultado debe ser cero porque 'si a 1 entero le quitas 1 entero te queda nada, y si a 3 de arriba le quitas 1 te quedan 2, y si a 4 de abajo le quitas 2 te quedan 2'. ¿Cómo le demostrarías con tus botes el error en su lógica?"

Preguntas Guía:

- "Explica paso a paso: ¿Cómo hiciste con tus botes para restarle $1 \frac{1}{2}$ litros a la jarra inicial? Describe el proceso libre que siguió tu equipo."
- "Al dibujar el plano del remanente, ¿cómo representaron la acción de vaciado y el agua sobrante en el fondo?"
- "¿Qué transformación o equivalencia necesitaron hacer con el bote de $\frac{1}{2}$ para poder restarlo correctamente de los cuartos de la jarra?"

Materiales:

Sets de envases fraccionarios de capacidad (botes identificados como enteros, medios y cuartos de litro) por equipo.

Jarra graduada de control, tazón receptor principal y agua para los trasvases.

Instrumento de Registro: "El Misterio del Residuo en la Jarra".