



BENEMÉRITA Y CENTENARIA ESCUELA NORMAL DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ.

TITULO: La modelación matemática de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas como estrategia didáctica apoyada en GeoGebra para un grupo de segundo grado de secundaria

AUTOR: Manuel Espino Ramírez

FECHA: 7/15/2026

PALABRAS CLAVE: Modelación matemática, Sistemas de ecuaciones, GeoGebra, Representaciones, ACODESA

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE GOBIERNO DEL ESTADO
SISTEMA EDUCATIVO ESTATAL REGULAR
DIRECCIÓN DE EDUCACIÓN
INSPECCIÓN DE EDUCACIÓN NORMAL

**BENEMÉRITA Y CENTENARIA
ESCUELA NORMAL DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ**

GENERACIÓN

2022



2026

**“LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
CON DOS INCÓGNITAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA APOYADA EN
GEOGEBRA PARA UN GRUPO DE SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

MANUEL ESPINO RAMÍREZ

ASESOR (A):

DRA. DIANA SARAIT GÓMEZ LEAL

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

JULIO 2026



**BENEMÉRITA Y CENTENARIA ESCUELA NORMAL DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ
CENTRO DE INFORMACIÓN CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA**

**ACUERDO DE AUTORIZACIÓN PARA USO DE INFORMACIÓN DEL DOCUMENTO
RECEPCIONAL EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA BECENE DE ACUERDO A LA
POLÍTICA DE PROPIEDAD INTELECTUAL**

A quien corresponda.
PRESENTE. –

Por medio del presente escrito MANUEL ESPINO RAMÍREZ
autorizo a la Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí, (BECENE) la
utilización de la obra Titulada:

**"LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS
INCÓGNITAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA APOYADA EN GEOGEBRA PARA UN GRUPO DE
SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA."**

en la modalidad de: Tesis de Investigación

para obtener el

Título de LICENCIADO EN ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

en la generación 2022-2026 para su divulgación, y preservación en cualquier medio, incluido el
electrónico y como parte del Repositorio Institucional de Acceso Abierto de la BECENE con fines
educativos y Académicos, así como la difusión entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras
personas, sin que pueda percibir ninguna retribución económica.

Por medio de este acuerdo deseo expresar que es una autorización voluntaria y gratuita y en
atención a lo señalado en los artículos 21 y 27 de Ley Federal del Derecho de Autor, la BECENE
cuenta con mi autorización para la utilización de la información antes señalada estableciendo que se
utilizará única y exclusivamente para los fines antes señalados.

La utilización de la información será durante el tiempo que sea pertinente bajo los términos de los
párrafos anteriores, finalmente manifiesto que cuento con las facultades y los derechos
correspondientes para otorgar la presente autorización, por ser de mi autoría la obra.

Por lo anterior deslindo a la BECENE de cualquier responsabilidad concerniente a lo establecido en
la presente autorización.

Para que así conste por mi libre voluntad firmo el presente.

En la Ciudad de San Luis Potosí. S.L.P. a los 07 días del mes de JULIO de 2026.

ATENTAMENTE.

MANUEL ESPINO RAMÍREZ

Nombre y Firma

AUTOR DUEÑO DE LOS DERECHOS PATRIMONIALES



BECENE-SA-DSE-RT-PO-01-05

Revisión 2

Administrativa

Dictamen Aprobatorio del
Documento Recepcional

San Luis Potosí, S.L.P.; a 22 de Junio del 2026

Los que suscriben, tienen a bien

DICTAMINAR

que el(la) alumno(a): C. ESPINO RAMIREZ MANUEL

De la Generación: 2022 - 2026

concluyó en forma satisfactoria y conforme a las indicaciones señaladas en el Documento Recepcional en la modalidad de () Ensayo Pedagógico, () Informe de Prácticas Profesionales, () Portafolio Temático, (X) Tesis de Investigación, () Tesina, () Portafolio de Evidencias.

Titulado:

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA APOYADA DE GEOGEBRA PARA UN GRUPO DE SEGUNDO DE SECUNDARIA

Por lo anterior, se determina que reúne los requisitos para proceder a sustentar el Examen Profesional que establecen las normas correspondientes, con el propósito de obtener el Título de Licenciado(a) en ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

ATENTAMENTE COMISIÓN DE TITULACIÓN

DIRECTORA ACADÉMICA

MTRA. VIANEY COVARRUBIAS CERVANTES



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN
SISTEMA EDUCATIVO ESTATAL REGULAR
BENEMÉRITA Y CENTENARIA
ESCUELA NORMAL DEL ESTADO
SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

DIRECTORA DE SERVICIOS ADMINISTRATIVOS

MTRA. FÁTIMA GUADALUPE PABIAN VANEGAS

RESPONSABLE DE TITULACIÓN

MTRO. GERARDO JAVIER GUEL CÁBRERA

ASESOR DEL DOCUMENTO RECEPCIONAL

DRA. DIANA SARAIT GÓMEZ LEAL



DEDICATORIA

A mis padres, María del Rosario Ramírez Gaytán y Wenceslado Espino Colin, quienes han dado todo por mí, siendo sus alegrías mis logros y consuelo en mis malos momentos, por proveer lo necesario para que no me falte nada. Sin saber de qué forma, pero siempre dispuestos a ayudarme; les dedico esta parte tan importante de mi vida.

A mis hermanos, María de Jesús y Fernando, porque los llevo en mi ser, en los recuerdos, en la sangre y en el corazón, ustedes son quien soy.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios, en quien tengo puesta mi esperanza, mi confianza y mi vida, pues al final de todo no hay nada y lo es todo.

A mi familia, a mis padres María del Rosario Ramírez Gaytán y Wenceslado Espino Colin y hermanos Maria de Jesús y Fernando, por todo el sacrificio que hemos hecho, por este ideal de apoyarnos en lo que nos gusta y lo que queremos ser, por su presencia en todo tiempo a pesar de no entendernos siempre, estaré eternamente agradecido por ser la base donde se apoyan mis pies.

A mis tí@s, especialmente a mi tía Ambrosia por brindarme su hogar y acogerme como uno más de sus hijos, por despertarme después de cada desvelo, por darme de comer y atenderme cuando enfermaba.

A la Dra. Diana Sarait Gómez Leal, directora de este trabajo, por enseñarme lo que hay más allá de cada cosa, de la enseñanza y de las matemáticas, por orientarme y aconsejarme, por ayudarme a llegar a donde estoy, por todo lo que ha hecho por mí, muchas gracias.

A mis amigos Alan y Dany, por apoyarme, por acompañarme, por darme identidad, por reflejarme en ustedes y ustedes en mí, por hacer de este estudio una aventura, tan preciosa e inolvidable.

A la BECENE, en conjunto con sus profesores, profesores titulares en la práctica y demás personas de esta institución que aportaron a este logro, les agradezco cada enseñanza y experiencia.

Índice

Introducción.	8
I. Planteamiento del problema.	12
1.1. Descripción de la problemática.	12
1.2. Pregunta de investigación.	17
1.2.1. Pregunta general.	17
1.2.2. Preguntas específicas.	17
1.3. Objetivos.	18
1.3.1. Objetivo general.	18
1.3.2. Objetivos específicos.	18
1.4. Justificación.	19
1.5. Marco contextual.	24
1.6. Antecedentes.	27
1.6.1. Estudios internacionales.	27
1.6.2. Estudios nacionales.	30
1.6.3. Estudios regionales.	32
II. Marco Teórico.	33
2.1. Teoría de registros de representaciones semióticas.	33
2.2. Modelización matemática como estrategia didáctica.	36
2.3. La tecnología en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones.	40
2.4. Sistemas de ecuaciones y puntos de equilibrio.	42
III. Metodología.	45
3.1. El método.	45
3.2. Investigación con enfoque mixto.	45
3.2.1. Diseño anidado	47
3.3. ACODESA.	48
3.3.1. Etapas de ACODESA.	50
3.4. Estrategia metodológica.	52
3.4.1. Muestra y población de estudio.	53
3.4.2. Hipótesis y supuesto.	54
3.4.3. Intervención.	54
3.4.4. Instrumentos y técnicas de recolección de datos CUAL-cuan.	56
3.4.5. Descripción de variables.	57
3.5. Cronograma de actividades.	58
IV. Análisis preliminar.	60
4.1 Resultados del diagnóstico.	61
4.1.1. Interpretación de situaciones problema.	63

4.1.2. Conocimiento de las bases operativas del álgebra.	66
4.1.3. Dominio de los conocimientos de linealidad.	69
4.1.4. Planteamiento de sistemas de ecuaciones.	71
4.1.5. Resolución de sistemas de ecuaciones.	72
4.1.6. Interpretación de representaciones gráficas.	73
V. Plan de acción.	76
5.1. Consideraciones para estructurar el plan de acción.	76
5.2. Diseño de actividades.	79
5.3. Estructura del plan de acción.	81
5.3.1. Diseño de intervención del grupo de control.	91
VI. Análisis de resultados.	99
6.1. Análisis cualitativo.	99
6.1.1. Comportamientos esperados antes de la aplicación y los encontrados.	100
6.1.2. Registro de modelos matemáticos y procedimientos.	105
6.1.2.1. Comparación de registros ante el grupo de control.	120
6.1.3. Aplicación de GeoGebra como vía de aterrizaje.	121
6.1.4. Dificultades identificadas al resolver situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales.	126
6.1.5. Representaciones alcanzadas durante el Postest.	128
6.2. Elección de pruebas estadísticas.	131
6.3. Análisis cuantitativo.	132
6.3.1. Observaciones de los resultados obtenidos de los exámenes.	133
6.3.2. Comparación de resultados de las pruebas.	135
6.3.3. Prueba t de Student.	136
6.4. Resultados obtenidos en los grupos tratados.	138
VII. Conclusiones, limitaciones y alcances.	141
7.1. Conclusiones.	141
7.2. Alcances y limitaciones.	148
7.3. Sugerencias para futuras investigaciones.	150
Referencias.	152
ANEXOS	158

Introducción.

El presente trabajo ha tenido origen ante la experiencia dentro de las aulas de educación secundaria tratando temas contenidos en la disciplina de las matemáticas, donde se observa un desinterés y falta de sentido y significado hacia los temas que se tratan, específicamente, en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales. Donde las secuencias didácticas se orientan al seguimiento de un método para una solución de forma mecánica, resolviendo problemas típicos y no contextualizados.

Es importante trabajar en el diseño de secuencias y actividades que causen en los estudiantes una proyección de dónde utilizar lo que se está aprendiendo, es decir partir de una necesidad hacia las matemáticas, donde los objetivos principales sean la motivación para utilizar los conocimientos propios y resolver situaciones, en este caso se ha de atender esta situación eligiendo contextos que desarrollen de la forma más natural posible un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Para ello, se ha considerado seguir este trabajo utilizando argumentos desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, ya que permite concebir la construcción de distintas formas de representar una sola información, buscando la confianza en los estudiantes de utilizar sus propios procedimientos para intervenir en problemas de matemáticas.

Este trabajo presenta el diseño e intervención de una secuencia didáctica con base en la modelación matemática y el apoyo de GeoGebra para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, llevando a la práctica la intervención de tres situaciones hasta elevar el

nivel, a una situación que implica un punto de equilibrio en un problema de oferta y demanda.

De esta manera, la presente investigación se centra en la comparación de los resultados obtenidos antes y después de la investigación, la introducción de una secuencia didáctica utilizando como apoyo para aterrizar el aprendizaje al software GeoGebra, la utilización de ACODESA una metodología basada en teorías de aprendizaje para recolectar datos que sirvan para analizar cómo es que influye la modelación matemática en el aprendizaje de este tema.

La investigación contiene siete capítulos, divididos en subtemas en cada uno los cuales se clasifican de la siguiente manera:

En el capítulo I, se da a conocer la problemática identificada desde la enseñanza de temas algebraicos, seguido de ello se exponen las preguntas de investigación, los objetivos a tratar, tanto el general como los específicos que guiarán el estudio. Además, se realiza una justificación del porqué se está atendiendo esta problemática y se pone en contexto quienes serán los sujetos de muestra, así como su contexto y para cerrar se describen las investigaciones que anteceden a este proyecto tomando en cuenta a la modelación matemática y los sistemas de ecuaciones.

El capítulo II, se describe cada aspecto del marco teórico, tomando como referencia los antecedentes y temáticas relevantes para esta investigación, siendo estas la Teoría de Registros de Representación Semiótica, la Modelación Matemática, la tecnología en la enseñanza de las Matemática y el empleo de puntos de equilibrio para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales.

El capítulo III, desarrolla la metodología de investigación, siendo un enfoque mixto detallando cómo fue la elección de este enfoque y el diseño que se utiliza, presenta para la parte cualitativa con un desarrollo de lo que trata ACODESA y la exposición de la estrategia metodológica que se prevé llevar a cabo, Además se presenta el esquema de la investigación definiendo un supuesto y una hipótesis, las variables y los instrumentos de recolección de datos que se utilizaron, finalmente se pone en conocimiento en cronograma de actividades que llevó el proyecto.

En el capítulo IV, se presenta un análisis preliminar de los resultados obtenidos durante la aplicación del diagnóstico, aquí se identifican los conocimientos algebraicos de los estudiantes y se realiza tal análisis a través de figuras y gráficas para visualizar el comportamiento en ambos grupos, los resultados se organizan por los indicadores establecidos para tener un control y clasificación de lo que comunicaría cada pregunta del diagnóstico realizando textos comparativos entre el grupo de control y el experimental.

El capítulo V, plasma el diseño de la intervención, iniciando por las características que se consideraron para la construcción de la misma, seguido de este punto se presenta como fue la experiencia en el diseño de las situaciones de modo que propicien una modelación matemática real, se presenta cada una de las actividades clasificada por las fases de la metodología ACODESA las cuales definen cada momento de la secuencia y por último se encuentra la intervención que se desarrolló en el grupo de control.

En el capítulo VI, se pone en conocimiento el análisis guiado por los objetivos específicos, presentando en primer lugar la parte cualitativa, donde se expone una comparativa entre los comportamientos de los estudiantes ante lo previsto de la secuencia, se revisan las representaciones matemáticas utilizadas por los estudiantes y el papel que

mantiene la modelación matemática al trabajar con sistemas de ecuaciones, se pone en conocimiento el trabajo con la tecnología durante la intervención y se compara con los resultados finales y los del grupo de control.

En segundo lugar, se realiza el análisis estadístico correspondiente a la parte cuantitativa, desde la elección de la prueba paramétrica (t de Student), el desarrollo de la prueba t de Student y los resultados obtenidos durante el postest.

En el capítulo VII, se aterriza en las conclusiones ante los resultados obtenidos del análisis, ordenado en tres partes; la primera de la conclusión a la que se llega de cada objetivo específico planteado y la respuesta a la pregunta general de investigación, la otra de los alcances que tuvo realizar este proyecto, así como el reconocimiento de las limitantes y la tercera de sugerencias que sirven como referencia para futuros trabajos en esta línea.

I. Planteamiento del problema.

1.1. Descripción de la problemática.

El trabajo en la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria, tiene grandes retos uno de ellos, es construir secuencias donde los estudiantes logren ver y aplicar la utilidad de los conocimientos dentro de actividades reales, principalmente en ramas como el álgebra, donde tradicionalmente se resuelven ejercicios por medio de reglas, métodos y series de pasos para llegar a respuestas contenidas en una expresión abstracta.

Como se menciona en el trabajo de Pochulu, Font y Rodriguez (2016), sobre el diseño de secuencias y actividades que realizan los profesores, existen dificultades en el momento de valorar si los problemas presentados son suficientes, variados y contextualizados para llegar a un proceso matemático real como es la modelización, incluso se hace más compleja esta tarea cuando se trata del trabajo propio.

El currículo de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) llevada a cabo en 2022, exige un cambio de perspectiva hacia la forma de la enseñanza de las matemáticas, ya que estas no deben tratarse de manera aislada sino que se utilice como una articulación con otras disciplinas, que soluciona problemas de interés común dependiendo del contexto y comunidad a la que se dirija y trata de explicar lo que sucede en el mundo real; para los programas de estudio presentes, las matemáticas no son como un formulario el cual se deba aprender para presentar exámenes, sino como una herramienta transversal que nos permita explicar la realidad y dar solución a problemas que causen un sentido en el aprendizaje de los alumnos.

En el plan de estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria 2022 podemos ver algunos de los puntos que deben cubrirse al momento de llevar a cabo el proceso de enseñanza de las matemáticas:

Propiciar el desarrollo del pensamiento matemático ejercitando las destrezas de estimación y aproximación, con la condición de que se desarrollen en la vida real, especialmente, cuando están involucrados el tiempo y el dinero (pág. 89).

Desde esta perspectiva, se toma en cuenta lo que demandan las directrices de la NEM en cuanto a tratar contenidos de matemáticas; la intervención y recolección de datos que se desarrollen posteriormente se llevarán a cabo en la Escuela Secundaria General Francisco González Bocanegra, institución pública la cual se encuentra ubicada en la capital de San Luis Potosí

Por otra parte, la NEM no plantea sólo utilizar situaciones donde es evidente el uso de alguna rama de las matemáticas, como se hace tradicionalmente con estadísticas en las ciencias sociales o figuras en construcciones y el arte, sino que se propone abarcar actividades humanas en contextos únicos donde se reconozca la utilidad y se proponga soluciones aplicables a lo que está fuera de las matemáticas.

El acercamiento a los conocimientos científicos y tecnológicos tomando en cuenta que son resultado de actividades humanas interdependientes desarrolladas en un contexto específico; están en permanente cambio, con alcances y limitaciones y se emplean según la cultura y las necesidades de la sociedad. (pág. 144)

La NEM se centra en enseñar a los estudiantes a aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones cotidianas, de modo que puedan comprender mejor la utilidad y relevancia de las matemáticas en su entorno.

Al trabajar con temas dentro de la rama del álgebra, en este caso, los sistemas de ecuaciones 2×2 se evidencia el problema sobre el cual se realiza el trabajo presente; el cual es la falta de una vinculación de utilidad con la construcción de ecuaciones y sus soluciones con el contexto de los estudiantes, pues estas solo suelen quedarse en abstracciones.

En el tema de sistemas de ecuaciones lineales, cuando los estudiantes ven una letra en una expresión algebraica, dos letras o dos ecuaciones, se asustan, se sienten intimidados o incluso incapaces de aprender y tienden a tener la creencia en que el poder y el saber es para los estudiantes más sobresalientes. Pero, ¿por qué sucede esta situación? ¿Qué hacer para que esto no suceda? ¿cómo relacionar un tema algebraico con la vida?

La falta de actividades que lleven al alumno a construir propiamente su sistema de ecuaciones desde cero, limita a que solo se llegue a soluciones mecánicas y estas se queden a su vez en la operación matemática sin llevarla a lo útil, o a lo que realmente ayudaría en el caso de plantear una situación. De tal suerte que, al momento de evaluar estos contenidos sólo se mide la habilidad de resolverlo matemáticamente y por los pasos establecidos; para cambiar esta situación se propone el trabajo con la modelación matemática.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015) describen que el proceso de modelación sucede cuando alguien utiliza un instrumento de información, un gráfico, una tabla de datos, una imagen o cualquier otro recurso de información para operar sobre algo, es decir; la situación que se necesita resolver. Llamando así a quién implica o lo que implica la situación como lo modelado y al recurso de información el modelo.

El problema que ha de desencadenar la investigación es en la modelación matemática, radicando en la transición de las representaciones que el alumno construya;

como es el lenguaje común, el lenguaje algebraico y la representación gráfica de sistemas de ecuaciones; teniendo como meta el paliar las dificultades que tienen los alumnos al momento de traducir una situación problema que surge de su propio contexto a un sistema algebraico de ecuaciones lineales; pues esta es la consecuencia de trabajar con sistemas ya formulados y solucionarlos siguiendo los pasos de cada uno de los métodos.

Es importante trabajar con estos temas de álgebra lineal, pues la solución de sistemas de ecuaciones es base de casi todas las áreas de las Matemáticas; además de sus aplicaciones en otras disciplinas como es la Física, la Ingeniería, entre otras ciencias dándole un enfoque interdisciplinario; ya que es un tema que se presta ante el planteamiento de situaciones reales desde distintas áreas del conocimiento.

Lladó, Agudelo, Vásquez, Verbisck, Pipitone, Barquero, y Bosch (2025) toman a la interdisciplinariedad como el trato entre disciplinas enfocadas a la vida cotidiana de la sociedad y no de forma que parecen cajas aisladas y no tienen ninguna relación; que esta forma de trabajar debe ser impulsora del aprendizaje, de otra forma se podría explicar que la interdisciplinariedad es un desafío que lleva a equilibrar el contenido de cada disciplina con su potencial educativo. (pág. 185)

Tamayo y Tamayo, M. (1986) afirma que la interdisciplinariedad nace debido a la postura en contra de la especialización, en contra del tratamiento de las ciencias fragmentadas, señalando que el prefijo inter (entre) significa que se fijará la solución a un problema, buscando relación entre varias disciplinas, surge reitera de la exigencia de las mismas disciplinas, pues una sola de ellas es la base de una ciencia que al ir creciendo en complejidad, necesita de leyes, procesos o herramientas que proporcionan otras disciplinas. (pág. 5-6)

Las consecuencias directas de lo que se está analizando son la falta de sentido y comprensión a las soluciones, no lograr argumentar por qué se ha aplicado un método en comparación a otro, que al presentarse un problema no logren generar el sistema; añadiendo que durante la evaluación no se realiza en modo formativa pues no se contempla la capacidad de modelar y crear instrumentos matemáticos.

Por ello, cuando los alumnos no entienden que representa una literal y qué la diferencia de la otra, es visible la necesidad de implementar y evaluar con estrategias, como es la Modelación Matemática, llevando a los alumnos a construir, entender y solucionar sus sistemas de ecuaciones desde cero, fortaleciendo así el pensamiento crítico, y crear un interés y sentido hacia el estudio del álgebra.

Trabajar con la modelación matemática lleva el fin de obtener mayor evidencia que vincule la solución de sistemas de ecuaciones con el pensamiento crítico, la argumentación del porqué de las soluciones y la comunicación de sus propios hallazgos a sus compañeros; más allá de si la solución es correcta o no, sino para que se utilizó. Además, el modelar un problema matemáticamente de forma correcta puede reflejar la capacidad de poder manejar problemas en otros contextos.

Entonces, el problema radica en que para los alumnos el ver literales carece de usos, sentidos y significados; por que la forma de enseñar, en específico para este caso, sistemas de ecuaciones, son a partir de procesos algebraicos y métodos que difícilmente pueden identificar en su entorno. A partir de estos rasgos, es que se ha considerado buscar una forma alterna de enseñar los sistemas de ecuaciones como es la Modelización matemática y el uso del software GeoGebra, diseñando una secuencia que permita una visión del uso de

un sistema de ecuaciones interactuando y argumentando la forma de resolver una situación, tanto de forma matemática como en la situación planteada.

1.2. Pregunta de investigación.

Para dar una orientación del camino que ha de seguir este trabajo se han formulado las siguientes preguntas de investigación; una general y tres específicas, mismas que ayudarán a identificar los rasgos relevantes entre la modelación matemática y los sistemas de ecuaciones y los aspectos a valorar. Además, guiarán los objetivos de esta investigación.

1.2.1. Pregunta general.

¿Cómo influye el uso de modelación matemática y el apoyo de GeoGebra, para lograr un aprendizaje significativo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en un grupo de segundo grado de secundaria?

1.2.2. Preguntas específicas.

1. ¿Qué dificultades presentan los alumnos al resolver situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales cuando no se les proporciona un procedimiento matemático a seguir?
2. ¿De qué forma la modelación matemática influye en la capacidad de los alumnos para construir representaciones semióticas que ayuden resolver sistemas de ecuaciones lineales a partir de situaciones-problema?
3. ¿Cómo lograr un aprendizaje significativo y funcional de los sistemas de ecuaciones lineales, partiendo de la construcción de modelos matemáticos, como son los registros algebraicos y gráficos?

1.3. Objetivos.

1.3.1. Objetivo general.

Analizar con la metodología ACODESA como es que la modelación matemática y el uso de GeoGebra influye en la solución de situaciones problema y el refinamiento de las distintas representaciones semióticas de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1.3.2. Objetivos específicos.

1. *Diagnosticar* los conocimientos de álgebra, principalmente en el tema de solución de sistemas de ecuaciones lineales, a través de un examen inicial en los estudiantes para identificar áreas de oportunidad.
2. *Diseñar e implementar* una secuencia didáctica basada en la metodología ACODESA para la modelación de sistemas de ecuaciones lineales incluyendo actividades con GeoGebra.
3. *Analizar* cómo la comprensión del sentido de un procedimiento matemático beneficia la resolución a un problema del mundo real.
 - 3.1 *Identificar* las dificultades que presentan los alumnos al resolver situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales durante las primeras fases de la secuencia didáctica.
 - 3.2 *Describir* las representaciones que usan los estudiantes durante el proceso de modelación de situaciones y el papel que juegan los estilos de pensamiento matemático.

3.3 *Explicar* el papel que mantiene la modelización matemática como una estrategia didáctica en la traducción entre distintas representaciones semióticas de los sistemas de ecuaciones lineales.

4. *Evaluar* el alcance que tiene el uso de la modelación matemática y la traducción de representaciones semióticas en sistemas de ecuaciones lineales, comparando los aprendizajes de los estudiantes antes y después de la secuencia, además de los resultados entre el grupo de control y experimental.

1.4. Justificación.

La realización de este trabajo tiene intereses tanto personales como académicos los cuales se han de explicar a continuación; a lo largo de la experiencia en la práctica docente así como la etapa de estudiante fue común observar que los compañeros y ahora los estudiantes catalogan a la disciplina de las matemáticas como algo difícil, aún más cuando se comienzan a tratar temas del álgebra, por lo que uno de los motivos que han impulsado el tomar este tema ha sido la idea de contribuir para cambiar la idea que se tiene del uso de las letras y símbolos en el álgebra.

Bajo la misma situación, se encuentra la forma en la que comúnmente se enseña el tema de sistemas de ecuaciones lineales donde los estudiantes siguen los métodos ya establecidos para encontrar las soluciones evaluando que el estudiante obtenga correctamente tales valores o bien los pasos que realizó correctamente, por ello surge la motivación de utilizar el proceso de modelación matemática donde se busca que el estudiante utilice sus propios, símbolos, herramientas y procedimientos para hallar soluciones en actividades laborales y cotidianas.

Como menciona Segura, S. (2004), esta forma de valorar es algo que sucede muy a menudo, pues en los programas de estudio y pruebas de evaluación la mayor parte de los ejercicios indican sólo resolver el sistema de ecuaciones, luego otros pocos se dirigen a graficar y en menor medida el modelar un problema; además de que casi nunca se trabaja en la traducción de la solución gráfica al sistema de ecuaciones, ni del sistema a un problema. Es así que este trabajo espera beneficie directamente a las representaciones que el alumno realiza para resolver un problema.

Así valorar, los procedimientos y representaciones que produzcan los estudiantes y no solo los resultados, poniendo también atención en las dificultades que presenten para poder diseñar futuras secuencias, partiendo de que tomar problemáticas de los contextos y transformarlas en contenidos de matemáticas y de otras disciplinas es ideal para mejorar el aprendizaje.

Otra de las motivaciones es que actualmente, una dificultad a la que se enfrentan los profesores; es la de vincular los aprendizajes con el contexto de los estudiantes, pues representa una tarea compleja hallar las matemáticas reales en cada cosa que hacemos o que vivimos, es por ello que en este trabajo se presenta a la Modelación Matemática como una estrategia que ayuda a enfrentar esta dificultad.

Lo que se propone en esta investigación es realizar el diseño de una secuencia enfocada en la modelación matemática para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones la cual se ha de emplear en el grupo experimental caracterizado por estudiantes de segundo grado de secundaria los cuales pertenecen a la Secundaria General Francisco González Bocanegra.

Una razón más para trabajar los sistemas de ecuaciones, es la postura que se genera en los estudiantes al momento de tratar de resolver un ejercicio mediante un método, ya que se genera una reacción negativa que termina con errores incluso en las operaciones básicas, aun cuando aritméticamente pueden operar, en álgebra se aprecian equivocaciones hasta en sumas y restas con el uso de los signos.

Guzmán (2000) *citado en* Segura, S. (2004) hace referencia a esta situación donde explica que uno de los problemas que viene persistiendo desde la enseñanza tradicional son los errores en las operaciones elementales:

Por ejemplo, presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran, ecuaciones o sistemas de ecuaciones; aun cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución, tales errores vuelven a surgir en la introducción a la escritura literal para valores numéricos y en los comienzos del álgebra, sobre todo en igualdades y desigualdades. (pág.52)

Pues bien, al aplicar la secuencia se tiene como meta que los estudiantes utilicen modelos matemáticos propios para encontrar soluciones, como pueden ser operaciones aritméticas, tablas, símbolos, dibujos o palabras y que a su vez creen fundamentos de por que utilizaron tales herramientas, compartiendo sus hallazgos entre compañeros, de forma que sea más fácil explicar de dónde vienen las ecuaciones de un sistema.

Sin embargo, aplicar la secuencia para tratar las representaciones de los estudiantes, utilizar modelos matemáticos y resolver sistemas de ecuaciones no son las únicas razones, sino que este trabajo también se dirige a la motivación por aprender, tratando de llevar

situaciones del mundo real donde se aplican los sistemas de ecuaciones, a soluciones que cobran un sentido de utilidad y significado para ellos.

A través de la implementación de la estrategia, se abre un campo de estudio y diseño de otras herramientas que pueden ser útiles para el trabajo de temas matemáticos desde que se encuentran alrededor del mundo, además puede dar pie a la forma en la que los profesores pueden llevar a los estudiantes entre distintas representaciones de una misma información, procedimiento que se mueve bajo los lineamientos que ha propuesto la NEM, trabajando desde el contexto de los alumnos y las problemáticas que ellos viven.

Mejorar la forma de enseñar las Matemáticas es la meta de muchos profesores, en los cuales se tiene la visión de dejar como ejemplo una manera de llevar las problemáticas y situaciones del contexto al aprendizaje en el álgebra; mientras que en los estudiantes la tarea es hacer sentido en las actividades cotidianas donde es útil diseñar un sistema de ecuaciones, logrando de esta forma que las soluciones no sean solo representadas de forma sistemática, sino que sean visibles las áreas de aplicación sobre lo que aprenden, además de que al presentarles un sistema de ecuaciones lo puedan traducir con sus propias representaciones.

Se podría decir que se busca cambiar la manera de elegir y solucionar los problemas que involucran en este caso a los sistemas de ecuaciones, y la forma de evaluarlos fijándose no sólo en que sea correcta la solución en las incógnitas sino en los procesos y representaciones que el estudiante utiliza para entender y dar solución a las situaciones; pues si bien siempre puede haber errores al momento de ejecutar el algoritmo, existe un procedimiento que es coherente para el mismo alumno.

Trabajar con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables es fundamental y base en el álgebra, donde se maneja la mayor parte del tiempo con términos matemáticos, símbolos y procedimientos que servirán a los estudiantes al tratar con otros tipos de ecuaciones como son sistemas de ecuaciones cuadráticas, ecuaciones polinómicas, racionales y de otras características, además de temas como son las inecuaciones y el desarrollo de polinomios y factorización.

La enseñanza de temas algebraicos como los sistemas de ecuaciones lineales, se encuentra rodeado de diversos factores que no permiten a los estudiantes alcanzar la habilidad de reconocer y utilizar los conocimientos matemáticos en actividades de la cotidianidad. Las que se observaron principalmente con base en la experiencia son las siguientes:

- La enseñanza de las ecuaciones está sistematizada y apegada a métodos en los que el alumno solo sigue una serie de pasos.
- Los estudiantes no logran reconocer lo que se aprende en actividades del mundo real y se quedan en el valor de x y y , siendo un par ordenado que resolvió dos ecuaciones.
- Existe un rechazo en el uso de recursos tecnológicos para la enseñanza del álgebra y una postura negativa hacia la necesidad de que los alumnos deben ver donde se aplica lo que aprenden.
- Culturalmente se tiene la idea de que utilizar letras o símbolos en matemáticas es sinónimo de complejo y difícil; ocasionando sentimientos de rechazo e incluso ser tan negativo en los estudiantes que no quieren siquiera intentar.

Por lo tanto, este proyecto está enfocado en el diseño y aplicación de una secuencia para la enseñanza de sistemas de ecuaciones, proponiendo que los resultados que aquí se obtengan pueden ser de utilidad para trabajos en los que se utilice la modelación matemática, el aprendizaje del álgebra, el manejo de representaciones y el diseño de secuencias.

Finalmente, se han propuesto los objetivos para la investigación que se enfocan en el análisis de las representaciones semióticas y modelos matemáticos que los estudiantes utilicen para hallar una solución a una situación dentro de sus contextos, además de identificar las dificultades que presenten al no tener un método de solución a seguir.

1.5. Marco contextual.

A continuación, se presenta una descripción socioeconómica sobre la institución en la cual se ha llevado a cabo este trabajo; información recuperada de ESCUELASMEX.COM, comenzando desde los rasgos generales de la escuela y acotando la información hacia los grupos de alumnos con los cuales se ha trabajado. La Escuela Secundaria General Francisco Gonzáles Bocanegra se encuentra ubicada en calle Privada Júpiter número 165, Colonia Rural Atlas, en el municipio de San Luis Potosí, San Luis Potosí CP 78130, esta escuela funciona en los turnos matutino y vespertino dentro de una zona urbana, estando activa desde 1979 con una antigüedad aproximada de 46 años.

Figura 1.

Escuela Secundaria General Francisco González Bocanegra



Nota. Imagen de la institución.

Alrededor de la escuela se encuentra el panteón Valle de los cedros, la escuela primaria Amado Nervo, entre otros establecimientos como son barberías, talleres mecánicos, papelerías, fruterías, tiendas de abarrotes, entre otros. Al realizar registros de observación dentro de la escuela, se concluye que son habitantes en un nivel socioeconómico medio y que existe una participación considerable de personas provenientes del extranjero como Cuba y Estados Unidos de América.

El turno matutino est  conformado de primero a tercer año, del grupo A al F, cada uno cuenta con una cantidad de 25 a 30 alumnos, aunque existe un alto índice de inasistencias, derivado de distintas razones. Es una escuela secundaria general pública que cuenta con más de 18 aulas repartidas en 8 edificios, entre ellos un aula de medios, un laboratorio de ciencias, una sala de conferencias y talleres como el de corte y confección y m sica.

El acceso a internet y recursos tecnológicos es limitado, pues existe solo un aula de medios con 20 equipos aproximadamente los cuales no son los suficientes para cada alumno y regularmente se comparten, y se cuenta con internet gratuito de la CFE con poca

cobertura, características que pueden representar limitaciones al momento de llevar a cabo el proyecto.

Esta investigación se ha realizado con dos grupos de segundo grado de secundaria, el grupo “C” y el grupo “F”; el grupo de segundo “C”, de ahora en adelante grupo experimental, se conforma por 24 estudiantes de los cuales 13 son mujeres y 11 son hombres; este grupo se ha destacado desde la observación con características de interés en los aspectos dinámicos como es la participación y en la realización de las actividades académicas, es un grupo donde se logran institucionalizar respuestas e ideas muy concretas sobre los propósitos de aprendizaje; además de que muestran una mayor seguridad hacia sus conocimientos y la forma de resolver actividades con respecto al trabajo en otros grupos, lo que facilita la resolución de problemas en forma grupal.

El grupo de segundo “F”, a partir de ahora grupo de control, se encuentra formado por 16 estudiantes de los cuales 6 son hombres y 10 son mujeres; son alumnos que necesitan de dinámicas más complejas hacia el control de grupo y mucha atención específica durante las sesiones ya que existe un grupo de 4 alumnos canalizados a USAER, para los cuales se implementan ajustes razonables y actividades diferenciadas, se necesita desde la primera sesión establecer el significado o uso de los aprendizajes y estrategias de refuerzo positivo para motivar el trabajo del grupo.

La elección de los grupos experimental y de control fue propiciada por parte de la titular de la materia de matemáticas en segundo grado de la institución. Sin embargo, aunque los grupos presentan diferencias, ambos son homogéneos, ya que ambos son mixtos (hombres y mujeres) de adolescentes entre 13-14, con condiciones similares, en lo cuales los planes de clase que se emplean de los docentes son los mismos para ambos grupos,

además, en cuanto al desempeño académico presentan promedios similares. Finalmente, se considera necesario mencionar que el número real del grupo de control es de 23 estudiantes, de los cuales algunos no se consideraron en el análisis de resultados, ya que se encontraban ausentes en fases esenciales del proyecto.

1.6. Antecedentes.

1.6.1. Estudios internacionales.

A nivel internacional, Figueroa (2013) elaboró una secuencia didáctica con el uso del software GeoGebra para alumnos de cuarto de secundaria con la finalidad de resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables y abatir las dificultades que normalmente se presentan en este tema. Donde se encontró que la creación de problemas propios en la que la solución es un sistema de ecuaciones, se estimula la habilidad de resolverlos, además de que causa un mayor entusiasmo al momento de darle solución. Por otra parte, concluye que GeoGebra es una herramienta que ayuda a resolver problemas contextualizados, particularmente, problemas relacionados con la variación de los parámetros de las ecuaciones del sistema.

De la misma forma Rodríguez, Mena, Mena, Vásquez y Del Valle (2019) proponen una descomposición genética para solucionar sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, diseñaron instrumentos los cuales aplicaron a futuros profesores donde se confirmó que no hay una comprensión de la solución de un sistema y que se dificulta transitar desde diversas representaciones como los aspectos geométricos con los algebraicos y estos a su vez en la solución de un sistema de dos o más ecuaciones.

El trabajo de Jara, Tocto y Vivanco (2025) trata del manejo de la modelación matemática como una estrategia didáctica en el aprendizaje de ecuaciones lineales; donde presentan una problemática referida a la escasa contextualización en el estudio de ecuaciones lineales y el uso de metodologías tradicionales, al aplicar cuestionarios , unos con problemas contextualizados y otros con escala tipo Likert se encontraron resultados positivos, destacando en interés, la comprensión y aplicación práctica. Resultando que el uso de la modelación matemática es una estrategia eficaz que promueve el razonamiento, la participación y la motivación en el aprendizaje de ecuaciones lineales.

Por otra parte, encontramos la investigación de López y Flores (2012) se enfoca en el estudio de impacto que tiene la modelación matemática en la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales, este trabajo se basa en el desarrollo de habilidades en los alumnos, principalmente el pensamiento matemático, la solución de problemas, el uso de la tecnología y un ambiente de valores; que lleva a los autores a concluir que la modelación matemática tiene un impacto significativo en el aprendizaje desde la perspectiva del modelo de enseñanza Aprender Matemática, Haciendo Matemática.

En otro estudio realizado por Segura (2004) se ha realizado un trabajo enfocado en la resolución de sistemas de ecuaciones mediante una secuencia didáctica, donde su objetivo era el de elaborar y poner a prueba esa secuencia didáctica de calidad tratando de facilitar el aprendizaje en este tema y sus soluciones.

Un aspecto importante de este trabajo es que se centra en las diferentes representaciones en las que podemos encontrar un sistema de ecuaciones 2×2 , donde destaca la necesidad que existe de plantear actividades que lleven a la acción, formulación

y validación, encontrando después de haber hecho un análisis de su secuencia ya aplicada, que hubo momentos donde puso en juego no solo la capacidad de dar solución a los sistemas sino también de validar estos con argumentos, unos mediante la orientación del profesor y otros mediante el debate entre compañeros,

Siguiendo la línea de las investigaciones en modelación Arrieta y Díaz (2015) quienes hacen proponen a la modelación como la práctica que ha de vincular dos entidades desde un punto de vista donde la modelación permite ligar y asociar lo que se hace dentro del aula con lo que ocurre en las comunidades fuera de la escuela; en este trabajo se encontró que la modelación permite además de situaciones de la realidad, la vinculación con otras disciplinas, una idea central es que para que exista la modelación, de haber un modelador que intervenga con un objeto en lo que quiere modelar para que exista un cambio, más aquí de un modo en el que no existen separaciones del mundo real y las matemáticas.

Por otro lado Ferrari, Trejo y Méndez (2018) trabajaron con modelación escolar dos instrumentos, uno sobre el caracterizado de funciones polinómicas usando calculadoras y el segundo diseño donde se analizaron los signos de una familia de gráficas para relacionarlo con el número de raíces reales positivas; concluyendo con que estos diseños promueven un verdadero análisis de las variaciones numéricas y gráficas que permiten describir varios tipos de comportamiento, y se hace hincapié en la alta demanda de la formación inicial de los profesores para seguir aumentando el conocimiento en modelación escolar.

El trabajo de Mejía, Gallo y Quintana (2022) trata de la modelación matemática enfocada como una estrategia en la resolución de problemas matemáticos, donde su

propósito principal era conocer el nivel de capacidad al resolver problemas matemáticos en los cursos de precálculo y cálculo, entendiendo a la modelación matemática como lo que permite representar, trabajar y dar a conocer objetos de la realidad por medio de métodos matemáticos, pues bien después de aplicar esta estrategia didáctica en el curso de Matemáticas I, hubo un incremento en las habilidades de la resolución de problemas y que todas las partes compartieron de manera equitativa (la capacidad de interacción, la matematización y modelo matemático).

1.6.2. Estudios nacionales.

Se ha encontrado el siguiente trabajo de modelación en Física, Mateos (2000) presenta el trabajo con prototipos de obras hidráulicas, que al realizarlos en tamaño escala muestran aspectos muy aproximados a los reales, los cuales se basan en la capacidad de resolver un sistema de ecuaciones, aunque se centra la mayor parte del estudio en modelos analógicos que en los matemáticos pues estos se enfocan en el objeto físico

Más aun así al finalizar se hace una relación de los modelos físicos con los modelos matemáticos, dónde se encuentra que en los modelos matemáticos se necesitan conocer las ecuaciones que rigen el problema, que los problemas que admiten un enfoque multidimensional los matemáticos son más ventajosos y que es preferible utilizar un modelo físico en enfoques bidimensionales o tridimensionales.

Las investigaciones de Rodríguez y Quiroz (2016) tratan de la modelación matemática; el primero del papel que jugó la tecnología en el proceso de modelación matemática en el trabajo de ecuaciones diferenciales y el segundo del rol de la experimentación en la modelación matemática, fijándonos en el segundo su objetivo era el

de determinar cuál es el rol de la experimentación en la construcción de un modelo matemático dentro del curso de ecuaciones diferenciales, más en específico en el estudio de circuitos eléctricos resistencia-capacitor (RC).

Esta investigación mostró que la experimentación tiene cabida en las clases cabida en una clase de matemáticas, aún más si se utiliza a la modelación matemática y que ayuda a dotar de significado a los estudiantes de los conceptos matemáticos que se tratan y que el tipo de actividades que se diseñaron ayudan en la motivación de los estudiantes al hallar una relación con su entorno.

Por otra parte, se encuentra el trabajo de Ocampo y Torres (2025) quienes realizan un análisis del estado del arte sobre sistemas de ecuaciones lineales en un contexto STEM, con el objetivo de diseñar una secuencia didáctica que se apoye en lo que es la modelación matemática y STEM, donde se trabaje con sistemas de ecuaciones lineales en circuitos eléctricos, en este trabajo se toma a la modelación matemática como un marco en el que se puede conectar la teoría con la práctica en distintos espacios del conocimiento, en este caso circuitos eléctricos.

Como conclusión se tiene que la modelación matemática es un eje fundamental en la enseñanza de las matemáticas porque permite vincular conceptos abstractos en contextos reales para una mejor comprensión; además encontraron que si se incorpora el uso de un software como GeoGebra a la modelización se vuelve más efectiva e interactiva.

1.6.3. Estudios regionales.

Finalmente, a nivel local se encontraron narrativas pedagógicas sobre la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales, aunque ninguno de ellos se enfoca en la modelación matemática; mencionan aspectos importantes para diseñar secuencias didácticas como el empleo de actividades lúdicas, TICS y material didáctico, donde proponen secuencias basadas en estos materiales y su experiencia al llevar a la práctica el álgebra lineal.

Como es el trabajo de Aguilar Jasso (2021) quien elabora una ensayo pedagógico al aplicar una secuencia didáctica bajo el tema de sistemas de ecuaciones, relatando su experiencia favorable con el uso de tecnologías para transitar entre dos representaciones como es el lenguaje común y el algebraico, teniendo como propósito teórico fijarse en cómo los estudiantes adoptan un lenguaje matemático cada vez más refinado.

II. Marco Teórico.

2.1. Teoría de registros de representaciones semióticas.

La Teoría de registros de representaciones semióticas fue creada por Raymond Duval, la cual ha sido aplicada en investigaciones de Matemática Educativa, ya que la mayoría de los temas que se tratan en la educación sobre la enseñanza de las matemáticas tienen distintas formas de representar una sola información, algunas de ellas son: lenguaje natural (materno), registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural.

Hernández, Cervantes, Ordoñez y García (2017) describen etimológicamente de donde proviene la semiótica del griego (*semion*) como “signo” y que para los griegos la semiótica representaba los síntomas de un fenómeno natural, es decir, la semiótica es algo que representa lo que no se puede ver a simple vista; para Duval existen dos características cognitivas en las habilidades matemáticas, la primera es la existencia de diversos tipos de registros de representación semiótica y la segunda es que los objetos matemáticos no son accesibles a simple vista sino que los registros sirven para llegar al conocimiento mediante signos o representaciones de un fenómeno o situación.

Como se argumenta en Duval (2004) para llevar a cabo la traducción entre dos registros Duval presenta a la *Semiosis* que es la actividad donde surgen las representaciones creadas por signos y la *Noesis* que es el proceso cognitivo donde el estudiante se apropia de los conceptos del objeto matemático.

Los registros semióticos de representación son una teoría de gran importancia en el campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas ya que su estructura permite realizar análisis más allá de lo simple o lo intuitivo.

Duval (1998) citado en Borjón, Torres y Sosa (2015) con la idea de que para poder afirmar que un conocimiento matemático ha sido aprendido es a través de la traducción de una información dada inicialmente; (está normalmente mediante el lenguaje natural), en diversas representaciones semióticas cobrando un valor en cada conjunto de signos que se establecen para comunicar el conocimiento.

Cada una de las formas en las que el alumno va traduciendo la información que le da su profesor es una representación semiótica, donde a la vez estas representaciones cobran significado según el contexto, como puede ser en el caso de los sistemas de ecuaciones, el lenguaje común, el lenguaje algebraico, las representaciones gráficas, y otras derivadas de las mismas.

Una razón de describir cómo los alumnos aprenden a través de traducciones es lo que dice Segura (2004) pues afirma después de hacer un análisis entre los distintos registros de representación semiótica (verbal, algebraico y gráfico) con el tema de sistemas de ecuaciones lineales y notar que a este contenido en la educación tradicional lo ven como si fuese un proceso rápido y natural, y llega a la idea de que; “no basta una serie de problemas para que los estudiantes manejen con responsabilidad un sistema de ecuaciones lineales; es imprescindible trabajar diferentes registros semióticos que admiten un tratamiento en cada uno de ellos.” (pág. 56) esto tiene como finalidad además de ver a las situaciones problema en varios registros, llevar al alumno a “hacer matemática”.

Para formar una representación semiótica según Duval (2004) se debe hacer uso de signos que permitan mirar al objeto de estudio desde otra perspectiva o bien que lo represente al mismo objeto y que estas se vuelven interesantes al ser presentadas en orden superior: el lenguaje natural, una ilustración, un esquema, una tabla, etc. Además, se describen las reglas de conformidad las cuales detallan cómo será lo que Duval llama sistema de representaciones; estas reglas permiten que pueda ser reconocida una representación como perteneciente a un registro:

- *la determinación de unidades elementales: símbolos, vocabulario...*
- *las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior: reglas de formación de un sistema formal, gramática de las lenguas naturales...*
- *las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa: reglas canónicas propias a un género literario o a un tipo de producción en un registro. (Duval, 2004, pág. 77)*

Un concepto más completo de lo que es una representación semiótica es el siguiente; se refiere a la forma de representar con signos lo que se encuentra en la mente, estas producciones se pueden plasmar a través de un texto, de imágenes, de gráficos, figuras, números, etc; además se afirma que para poder lograr un aprendizaje de un tema matemático es necesario transitar entre representaciones. (Duval 1998 citado en Borjón, Torres y Sosa, 2015) (pág. 2)

En este trabajo se utilizarán principalmente los registros verbales, el lenguaje gráfico y el lenguaje natural; además de las representaciones que construyen los alumnos ante los primeros acercamientos de las situaciones.

Es importante no confundir el objeto matemático con sus distintas representaciones semióticas, uno de los objetivos es darle sentido a lo que se está aprendiendo, en caso contrario se desencadenará una pérdida de la comprensión y los conocimientos serán percibidos como inútiles fuera de su contexto de aprendizaje. (Segura, 2004, pág. 53)

Algunas veces la transición de un registro a otro será casi de forma natural (de forma espontánea), Segura (2004) muestra tres condiciones para que se pueda surgir de un registro otro de forma natural;

una correspondencia semiótica (a cada unidad de uno de registros le corresponde una del otro), un orden (se mantiene el mismo orden de aprehensión) y una univocidad semántica terminal (a cada unidad del registro de partida le corresponde una de llegada).

Durante el desarrollo de la implementación es necesario no precipitarse a dar respuestas, ni a forzar que los estudiantes lleguen al sistema de ecuaciones, tomando en cuenta que el objetivo es analizar las representaciones propias de los estudiantes desde la modelación matemática tomando al profesor en su papel como guía en el conocimiento; así como de que las situaciones propuestas permiten ver lo que se aprende en cada caso particular y el conocimiento general de todos los problemas.

2.2. Modelización matemática como estrategia didáctica.

La modelación matemática es *el proceso cíclico consistente en la creación o uso de modelos matemáticos para la resolución de una problemática basada en fenómenos de naturaleza física o social relacionados con la realidad* (Rodríguez y Quiroz, 2016), durante el proceso de modelar se transita entre el mundo real y las matemáticas con la finalidad de

dar solución a una situación; Blum y Borromeo (2009) reafirman esta idea pues en su trabajo “Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?” describen el proceso de modelar como la transición que realiza una persona entre el mundo real y el mundo de las matemáticas, incluyendo en el mundo real a todo lo que está fuera de las matemáticas. (pág. 45).

Reforzando estas ideas Confrey y Maloney (2007) describen a la modelación matemática como el proceso que lleva una persona al hallarse en cierta situación que carece de una solución, teniendo por consecuencia el llevarla a una estructura matemática; después de todo este proceso se obtiene un modelo el cual representa para quien modela una traducción de la información inicial, la cual se espera propicie soluciones a la situación en el mundo real.

Segura (2004) define el término situación (que será muy recurrido en este trabajo), como el conjunto de relaciones establecidas entre el alumno, un medio y el profesor, en la que la principal función es la asimilación de un tema. (pág. 56)

Mejía, Gallo y Quintana (2022) describen a la modelación como una estrategia de llegada y uso de los conocimientos matemáticos, en otras palabras, ellos dicen que la forma de encontrar una solución a un fenómeno puede ser diferente a solo aplicar teorías y memorizar conceptos, poniendo primero lo que se quiere resolver y hallar a los modelos matemáticos como herramientas útiles y facilitadoras.

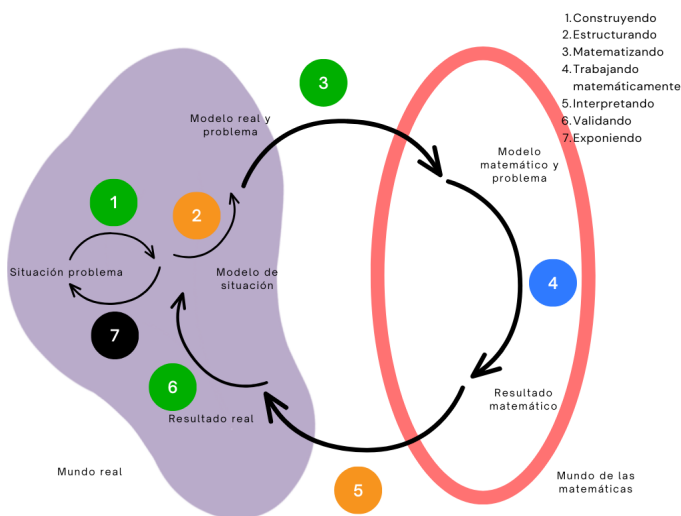
Arrieta y Diaz, (2015) en su trabajo sobre modelación desde la socioepistemología identifican tres formas en las que la modelación matemática puede ser utilizada dentro de la didáctica de las Matemáticas:

Desde su análisis distingue tres concepciones de modelación matemática: como método de enseñanza y de investigación, como alternativa pedagógica de la matemática y como ambiente de aprendizaje. Se piensa no solo en el esquema de enseñar matemáticas para poder aplicarlas, sino que se instala otro esquema, correspondiente a utilizar la modelación para el aprendizaje de las matemáticas o la generación de diversas capacidades u otros propósitos en la escuela. (pág. 29)

Ellos definen a la modelación matemática como el proceso en el que se busca una herramienta o forma de representar algo que necesita hallar una solución. Bajo la misma línea del proceso de modelación matemática a continuación, se tiene un desarrollo más detallado por pasos que se pueden seguir para dar solución a una situación problema como se muestra en la Figura 2:

Figura 2.

Ciclo de la Modelación matemática.



Nota. La imagen muestra 7 fases del proceso de modelación, las cuales no tienen un orden arbitrario. Esquema tomado de “Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?” (p. 46), por W. Blum y R. Borromeo Ferri, 2009.

Blum y Borromeo (2009) tocan puntos muy importantes a considerar en el trabajo de modelar, tanto para los alumnos como para el profesorado de matemáticas; primero con base en el esquema no es que sea arbitrario pasar por un solo camino para solucionar una situación problema, sino que cada alumno puede preferir seguir un proceso a la solución antes que a otro, llamando a esto “mathematical thinking style” un estudiante puede intentar solucionar algo construyendo desde el inicio un modelo matemático [“Analytical” (symbolic-dissecting) thinking style], mientras que otro puede preferir realizar una ilustración o resolverlo bajo términos del mundo real [“Visual” (pictorial-holistic) thinking style].

Segundo; los estilos de pensamiento matemático, también llegan a influenciar en la forma de trabajar de los profesores, pues si uno tiene un estilo analítico, se interesará más porque sus alumnos lleguen a una representación matemática, y si es de estilo visual su clase se guiará hacia la solución en el mundo real.

Otro aspecto importante a considerar al trabajar con modelización matemática es que llega a ser una tarea extensa tanto para los alumnos como para los docentes, pues estos están acostumbrados a seguir una ruta al solucionar un problema o dependen de un método establecido de solución, es necesario no precipitarse durante el primer encuentro con la situación, pues el profesorado tiende a llevar el mismo a los alumnos a una interpretación específica de la situación, cerrando al que aprende a tomar otros modelos en los que se pueda hallar una solución.

Teniendo en cuenta estos aspectos del proceso de modelación matemática se aterriza en el papel que jugará en este trabajo; y es que se espera de que los resultados de utilizarla como una estrategia, logren en los alumnos un aprendizaje significativo, pues si el

conocimiento se brinda sin un sentido de uso y no se aplica este terminará por olvidarse, Gómez (2015) llega a la idea de que rescatar el sentido y significado de una situación, sirve para construir un saber matemático (pág. 67); a que si simplemente se propone un sistema de ecuaciones y un método específico de llegar a la solución matemática sin tocar el "mundo real".

Arrieta y Díaz (2015) mencionan como es que sucede el proceso de modelación como la forma en la que algo tiene un sentido de existir y de ser utilizado, en el caso de un estudiante al resolver una situación que implica un sistema de ecuaciones los instrumentos que utilice para resolverlo será su forma útil y el procedimiento la modelación en sí, es decir, si este escribe, tabula, dibuja o realiza varias operaciones modela; pues el instrumento que utiliza es su modelo matemático y este tiene sentido porque se tuvo la necesidad de utilizarlo y le dio un resultado. Si otra persona quisiera resolver de esa forma el problema necesita conocer por qué y para qué se utilizó, de lo contrario no tendrá sentido.

2.3. La tecnología en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones.

A través de la revisión de los antecedentes correspondientes a trabajos que se enfocan en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones y el proceso de modelación matemática, viene la oportunidad de utilizar las herramientas tecnológicas en el aula de secundaria como son los software que facilitan los procedimientos entre cada actividad que se aplica; durante el encuentro con el problema se distingue la parte donde es necesario que se mezclen las matemáticas propuestas en el programa con eventos reales, de modo que el tema se llene de significado para los estudiantes.

En el trabajo realizado por Figueroa (2013) se habla del impacto que tuvo utilizar GeoGebra como apoyo en la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones destacando la visualización gráfica y la solución en las variables con la ayuda de deslizadores y que además se resuelven los problemas con mayor facilidad ya sea que estos estén contextualizados o no; recomendando totalmente el uso de herramientas tecnológicas dinámicas sin importar la forma en que se planteen los sistemas.

Para esta investigación, se pretende trabajar con problemas contextualizados que desarrollen sistemas de ecuaciones que den una solución significativa, tomando como herramienta de apoyo el software GeoGebra; software matemático, gratuito, que ha sido diseñado para trabajar con las distintas ramas de las matemáticas de cualquier nivel escolar, integrando hojas de cálculo, gráficos y deslizadores para la visualización de los temas matemáticos utilizados en los procesos de solución.

Bajo la teoría de los registros de representación semiótica, se toma en cuenta el uso de símbolos ya sean estos matemáticos u otros para poder traducir la información que proporciona el problema, así tratar de dar una solución matemática y luego apegada a lo que pide el contexto, siendo el papel del docente con ayuda de la tecnología el aterrizar con las mismas representaciones en su forma general, ya que al expresar la información en una tabla o en una gráfica se puede comprender mejor la transición entre las distintas representaciones halladas.

El uso de una herramienta tecnológica se hace aún más necesario en este trabajo cuando se pretende seguir el ejercicio de la modelación matemática, Rodríguez y Quiroz (2016) han trabajado en la implementación de la tecnología dentro del mismo proceso, donde mencionan que dentro de las aulas se deben implementar estrategias que sirvan como

apoyo en comprender las matemáticas escolares siendo utilizadas en la vida cotidiana. Aunque su trabajo transita en un nivel superior, se rescata la idea de utilizar tecnologías dentro del proceso de modelación, con las cuales cuenta GeoGebra como es el graficador.

Por lo tanto, se ha decidido utilizar GeoGebra ya que una herramienta como esta puede favorecer la comprensión de las soluciones en un sistema de ecuaciones, articulando relaciones entre las representaciones halladas para llegar hacia las soluciones que necesita el contexto planteado, promoviendo así un aterrizaje significativo dentro del ciclo de modelación.

2.4. Sistemas de ecuaciones y puntos de equilibrio.

Para el diseño de la secuencia que se ha de aplicar se utilizarán situaciones problema contextualizadas de acuerdo al entorno de los estudiantes pretendiendo hacer más fácil la identificación de las incógnitas que plantean los sistemas de ecuaciones; más antes de realizar tal estructuración se ha cuestionado sobre bajo qué tipo de planteamientos se desarrollaran los sistemas de ecuaciones de modo que no resulten casos forzados o fuera de la realidad en lo que no sucede.

Esto para alcanzar un proceso de modelación matemática completo el cual se puede definir también de la siguiente manera contemplando desde una perspectiva educacional; según Blum y Niss (1991) un ciclo de modelización completo es donde se transita desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático.

Tomando lo que dice Ariza Herreño (2021) un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones los cuales cuentan con las mismas variables; donde existen las siguientes condiciones: que el máximo valor de los exponentes de las variables debe ser

uno, que el número de variables que se desean tratar debe ser el mismo que de ecuaciones en el sistema y que al encontrar el valor de estas se satisfaga cada una de las ecuaciones.

Por lo tanto, un sistema de ecuaciones 2×2 es comprendido como dos ecuaciones (igualdades) lineales las cuales comparten las mismas dos variables, en donde la solución radica en un par ordenado correspondiente a estas incógnitas, las cuales se resuelven tradicionalmente por medio de una serie de pasos correspondientes a un método, que en muchas ocasiones no se comparte con un contexto ya sea este ficticio o real, convirtiéndose en abstracciones sin un sentido de utilidad.

Por ello se ha recurrido a diseñar una secuencia donde el nivel más complejo sea utilizar puntos de equilibrio los cuales comprenden la solución de un sistema de ecuaciones, tratando de abarcar problemas cotidianos como es el máximo punto de ahorro durante una semana en un gasto típico, como es el transporte, el punto donde un negocio comienza a ser rentable y el punto donde un precio alcanza la misma cantidad de oferta y demanda para la venta de un producto.

Hablando pues de problemas en la rama de la economía, se debe detallar lo que es la oferta, la demanda y el punto de equilibrio entre estas, pues según Galagovsky y Cittadini (2008) *la oferta* es cuando a un producto se le aumenta el precio, aumenta su producción, si el precio baja su producción también, es la relación entre la cantidad que se ofrece y el precio del mercado; y *la demanda* se ha de comportar como el precio del producto o servicio varíe, es decir, es la cantidad de bienes que se adquieren a partir de un precio, la demanda baja cuando el precio del producto aumenta y viceversa.

Entre la gráfica de oferta y demanda existe un punto en el que el precio se estabiliza y a la vez se alcanza un máximo número de compras o adquisiciones dependiendo el

contexto, esta intersección es definida como el punto de equilibrio de oferta y demanda. Así, la estructura de la intervención didáctica que se ha de diseñar, será secuenciada de modo que torne un sentido de los sistemas de ecuaciones como herramientas para tomar decisiones al emplear cualquier negocio, de modo que se llegue a la visualización de un punto de equilibrio mismo que será la solución en las variables de un sistema de ecuaciones lineales.

Al pasar de las operaciones, tablas o cualquier forma que el estudiante utilice para resolver las situaciones planteadas, GeoGebra ha de servir como una representación visual y manipulable según el comportamiento de cada una de las ecuaciones, lo que se busca permita, entender al alumno que representa una solución en un sistema de ecuaciones, y cómo se comporta la expresión algebraica en su forma gráfica.

García et al. (2025) al implementar recursos digitales en el aprendizaje del álgebra lineal, como el diseño de herramientas visuales y tecnológicas en GeoGebra y MATLAB, afirma que este tipo de materiales permite una representación gráfica de procesos abstractos y que beneficia principalmente a que el estudiante relacione información entre estas consolidando aprendizajes con significado. Además, hablando específicamente del álgebra, al mostrar una representación geométrica (en su caso de una matriz), el objeto ahora es tangible y por tanto entendible.

III. Metodología.

3.1. El método.

Esta investigación es de tipo investigación-acción, ya que durante el proceso de aplicación el docente en formación no solo recolecta datos, si no que se colocará como sujeto del trabajo y además ha de observar y analizar lo que sucede; tiene autonomía en la práctica con el grupo, donde se interviene buscando la mejora del ejercicio propio agregando los hallazgos en el proceso de modelación y los registros semióticos hallados.

El investigador se toma como figura que pertenece al proceso y a diferencia de otros estudios donde solo se observa o se participa sólo de forma significativa, se interviene desde el principio con el diagnóstico y las primeras observaciones, hasta la valoración y análisis de los instrumentos aplicados con los resultados que se obtuvieron. Vidal y Rivera (2007) definen el método de investigación-acción como una forma de investigación en la que se puede relacionar el estudio de un problema con programas de acción social logrando de forma simultánea conocimientos y cambios sociales.

Con el método se busca el análisis y la descripción de lo que ocurre en la práctica docente, se ha creído pertinente utilizar esta forma de trabajar ya que permite como ya se mencionó en primer lugar el rol del docente como aplicador y como investigador, además de que la metodología que hemos de utilizar se enfoca a el diseño de prácticas docentes en matemáticas. Particularmente en este proyecto se llevará a cabo la intervención de una sola secuencia, fragmentada con base en las fases de las etapas de la metodología ACODESA, la cual se describe posteriormente.

3.2. Investigación con enfoque mixto.

Existen dos tipos principales de investigación, una de lo cuantitativo y otra de lo cualitativo, el primer enfoque trata de explicar la realidad a partir de las variables que comprenden una problemática y su finalidad es proporcionar como resultado datos derivados de objetos medibles y el segundo enfoque abarca la comprensión de un hecho y trata de explicar lo que se encuentra fuera de los resultados, y objetivos medibles; busca comprender el cómo y por qué de una situación; según Villanueva Couoh (2022) estos dos enfoques han coexistido porque aunque alcanzan importantes aportes al conocimiento ninguno alcanza la totalidad de la realidad y enuncia por tanto que son enfoques complementarios, dejando la decisión de qué camino tomar a las características de los objetos de estudio. (pág. 20)

Durante mucho tiempo como ya es sabido los enfoques cuantitativo y cualitativo eran percibidos como contrapartes por la mayoría de los grupos de investigadores, es hasta hace unas décadas que diversos investigadores comienzan a romper este paradigma con la idea de que combinar estos dos enfoques traería un modo diferente a la investigación, el enfoque mixto una visión en la que al afrontar un planteamiento se utilicen todos los métodos posibles; es decir, ver la problemática desde diversas posturas permitiría tener una visión más completa de lo que se está investigando. Hernández Sampieri, Fernández-Collado y Baptista Lucio (2006) impulsan este enfoque y defienden que la decisión entre un enfoque y otro es postura del investigador y que esta debe definirse de acuerdo a las interrogantes que se esperan responder dentro del trabajo.

Según Hernández Sampieri, Fernández-Collado y Baptista Lucio (2006) el enfoque mixto tiene sus inicios en 1960 con investigaciones que trabajan en la criminalística ya que en este campo combinan métodos cuantitativos para realizar análisis y cualitativos para

profundizar a través de la observación y el comportamiento; más es importante mencionar que este enfoque va más allá de utilizar distintos métodos, sino de mezclar la lógica inductiva y deductiva.

El enfoque mixto puede realizarse en varios sentidos, una forma es el trabajo en paralelo de ambos tipos de métodos (cualitativos y cuantitativos), otra manera es la de cuantificar datos obtenidos a partir de una herramienta cualitativa o el cuantificar datos cualitativos y finalmente diseños donde existe un enfoque prevaleciente manteniendo algunas características del otro enfoque. Para este trabajo es importante encontrar datos que aporten al análisis de cómo los estudiantes se apropian del conocimiento a partir de sus propias representaciones; además de resultados que complementen y evalúen la efectividad de la secuencia diseñada.

A lo largo de la investigación se resolverán distintas preguntas las cuales se espera abonen resultados a la pregunta general: *¿Cómo influye el uso de modelación matemática, para lograr un aprendizaje significativo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en un grupo de segundo grado de secundaria?*; principalmente se enfocan a la obtención de datos cualitativos, sin embargo, se utilizan algunas que se dirigen a lo cuantitativo es por ello que se ha hecho pertinente trabajar bajo una línea mixta con diseño anidado (el cual se describe en la siguiente sección) pues si bien se recogen ambos tipos de datos, tiene prioridad responder el cómo y por qué.

3.2.1. Diseño anidado

Este trabajo tiene un diseño de tipo anidado o también conocido como diseño incrustado concurrente de modelo dominante (DIAC) donde predomina uno de los dos enfoques; según Hernández Sampieri, Fernández-Collado y Baptista Lucio (2010) este

diseño recolecta datos cualitativos y cuantitativos donde a diferencia de un diseño de triangulación, uno de los dos enfoques es pormenorizado en cierto nivel, este enfoque que tiene menos prioridad es “anidado” en el enfoque central.

Nuestro enfoque central es cualitativo ya que nos interesa saber principalmente como los estudiantes se apropian de sus representaciones para resolver problemas matemáticos, y también evaluar la efectividad del instrumento implementado por lo que el enfoque incrustado al central será el cuantitativo. Como menciona (Creswell, 2009 citado en Sampieri, Collado y Lucio, 2010) con respecto a un experimento mixto, el enfoque cuantitativo se encarga de la parte de ver los efectos del tratamiento y el cualitativo de los sentimientos y experiencias durante el proceso de aplicación.

Para la parte cualitativa se utiliza una secuencia didáctica basada en la metodología ACODESA la cual permitirá ver las vivencias del estudiante al implementar el instrumento, desde el trabajo individual, por equipos, al defender sus proposiciones y obtener sus aprendizajes y dentro de este proceso; analizando las distintas representaciones semióticas que los estudiantes utilicen.

Y la parte cuantitativa donde se emplea un instrumento de evaluación antes de implementar la secuencia con un examen diagnóstico y después de la aplicación con un posttest el cual se espera, permita ver la efectividad de la estrategia utilizada, lo que se espera en la parte de este enfoque es complementar y ampliar en las evidencias sobre la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales comparando los resultados con una prueba estadística que se definirá a partir de una prueba de normalidad Shapiro-Wilk.

3.3. ACODESA.

La Metodología ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autorreflexión) tiene como ejes principales el sentido de significado y validación de los conocimientos matemáticos adquiridos por los alumnos, guiados por distintas etapas en las que el alumno va descartando y refinando las formas de representar a las matemáticas, en este caso se tomará un camino en el que los ayude a apropiarse de la modelación de sistemas de ecuaciones lineales utilizando los distintos métodos de solución.

Una de las características principales dentro del proceso al aplicar ACODESA es el evitar dar al alumno un concepto matemático, el procedimiento o las matemáticas en sí, al iniciar las actividades, sino que, a través de representaciones espontáneas creadas por el mismo estudiante (un primer modelo que funciona y es significativo para el que aprende), las cuales pasan a través del debate entre alumnos, el trabajo colaborativo y la autorreflexión modificándose y refinando, de modo que al momento de la institucionalización ya cuenten con el conocimiento de las matemáticas; un ejemplo es lo que hicieron Rodríguez y Soto (2011), ellos plantearon situaciones donde explican no es visible en primera instancia aplicable alguna rama de las matemáticas, es decir; tomaron una problemática con un contexto no matemático apoyándose en materiales manipulables con el propósito de modelar algunas situaciones dadas. (pág. 58)

La metodología en el enfoque cualitativo es resultado de cuestionarse lo que se quiere analizar en este trabajo; por lo que se cree pertinente aclarar los alcances que tendrá ACODESA en la obtención de los datos; primero esta metodología comienza desde una situación sin apariencias matemáticas lo que permite que en los alumnos exista un desfase cognitivo, pues desde sus propios conocimientos intentan dar una solución a un problema, cada fase es observable pues se pueden verificar los procedimientos de los alumnos, sus

dificultades y donde necesitan apoyo, en cada etapa se obtiene una representación refinada de la anterior lo cual permite ver cómo el estudiante se va apropiando de los objetivos y si no es así se pueden observar y documentar los distintos obstáculos en los debates y trabajos colaborativos.

3.3.1. Etapas de ACODESA.

En este trabajo veremos a la modelación como una estrategia de enseñanza, atravesando por distintas fases como es el trabajo colaborativo y el trabajo individual, se traza un camino en el que el alumno por medio de matemáticas puede dar solución a una situación. Para llevar a cabo el proceso de modelización matemática Hitt y Cortés (2009) proponen tres etapas apoyadas en el uso de la metodología ACODESA teniendo como principal objetivo la producción de secuencias didácticas que propicien la adquisición de conocimientos a largo plazo:

- Etapa 1. Se realiza la proposición de las situaciones, donde los estudiantes hacen uso de conocimientos previos y surgen las primeras representaciones espontáneas, además se recomienda el uso de materiales diseñados que pueden ayudarlos a llegar a representaciones más formales de la situación.
- Etapa 2. Se hace uso de lo que ya se conoce y se llega a un modelo matemático que permite explicar la situación propuesta (traducción de la situación real a las matemáticas). Los autores recalcan que estas traducciones no deben ser necesariamente del lenguaje común a una representación algebraica como se espera en la modelación de sistemas de ecuaciones, en didáctica de las matemáticas, cualquier representación de un concepto o situación problema es tan importante y

válido para llegar a lo que es el tratamiento algebraico, siendo el caso de las ecuaciones a formular. (pág. 3)

- Etapa 3. Proceso de institucionalización. El profesor deja el papel de guía y toma las representaciones refinadas para llegar al objetivo claro de lo que quiere lograr. (pág. 7-9)

A continuación, se resume de lo que trata cada una de las etapas de la metodología ACODESA, de modo que pueda encajar el proceso de la Modelación matemática; es importante recalcar que, en esta metodología, en las 3 primeras fases el profesor es un guía y es deber de los estudiantes de argumentar y validar sus producciones y finalmente en la institucionalización este presentará las ideas formales y retroalimenta sobre las distintas representaciones halladas, (Hitt y Cortés (2009) y Rodríguez y Soto (2011)):

1. Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema),
2. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales),
3. Debate (Puede convertirse en debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones)
4. Autorreflexión. Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y autorreflexión)
5. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

Dentro del enfoque socio-constructivista menciona Hitt (2007) llama a su metodología ACODESA que comienza desde un análisis preliminar de los estudiantes, con

la finalidad de ambientar el aula en equipos de tres integrantes de forma estratégica de acuerdo a el comportamiento y actitud de cada alumno, luego del diseño de una secuencia didáctica donde inicie por provocar un desequilibrio cognitivo, de la misma situación problema trabajar con los equipos, una puesta en común para crear los primeros conceptos y soluciones, una valoración individual de estas concepciones y finalmente aterrizar en el conocimiento.

Esta es una metodología que es utilizada en secuencias didácticas extensas, encajando y con lo que se quiere realizar en este trabajo que es el llevar a la práctica el proceso de modelización matemática en el contenido de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 que se establece para los alumnos en segundo grado de secundaria. La metodología ACODESA, Hitt y Cortés (2009) es utilizada en las dos primeras etapas de la modelación matemática, mismas que proponen los autores, (pág. 8) ya que permite llegar a los estudiantes en el trabajo del profesor a modelos matemáticos dada una situación problema inicial, se comienza por una representación espontánea creada por el propio alumno, dotada de funcionalidad, la cual se va refinando y modificando en cada etapa hasta llegar al objetivo del tema.

3.4. Estrategia metodológica.

El diseño anidado dentro del enfoque mixto es estructurado en dentro de las dos áreas metodológicas, en el cual una de las dos vertientes tiene prioridad sobre la otra y esta se encuentra inmersa como complemento de la información, el modo en el que se recogen los datos es de forma simultánea. Una ventaja de este modelo es que los datos se recolectan

simultáneamente, proporcionando una visión más completa y holística del problema de estudio. (Sampieri, 2010) (pág.572)

En esta investigación este diseño resulta idóneo, ya que se busca principalmente analizar cómo sucede el proceso de modelación matemática en el contenido de sistemas de ecuaciones lineales, agregando a su vez los distintos registros semióticos que utilizan los estudiantes para dar solución a este tipo de problemas.

3.4.1. Muestra y población de estudio.

Como se menciona en el marco contextual la muestra se conforma por dos grupos de estudiantes que cursan el segundo grado en la Escuela Secundaria General Francisco González Bocanegra; el grupo experimental que cuenta con 27 estudiantes (15 mujeres y 12 hombres) y el grupo de control que está integrado por 25 estudiantes (11 hombres y 14 mujeres).

La elección de qué grupo sería experimental y cuál el de control, no tuvo influencia por parte del docente en formación, sino que la elección fue hecha por el titular del grupo debido a sus propios criterios y características de los grupos; la cuales fueron que en el grupo de control los estudiantes necesitan mayor atención hacia el control del grupo, la diversidad de niveles cognitivos es muy marcada, por lo tanto diversidad de problemas y situaciones al resolver, actividades que logren los objetivos en corto tiempo y de forma individual, al contrario del grupo experimental quienes demuestran tener mayor disposición al trabajar en equipos y de forma grupal.

En el grupo experimental se ha de implementar la secuencia didáctica diseñada bajo la teoría de registros de representación semiótica y la metodología ACODESA aquí

establecida y en el grupo de control se ha de seguir la secuencia tradicional donde se van mencionando los métodos de solución en el tema de sistemas de ecuaciones 2x2.

3.4.2. Hipótesis y supuesto.

Para este trabajo se realiza un supuesto y una hipótesis ya que conforme al diseño tiene mayor peso uno de los enfoques (CUAL-cuan), los cuales se proponen a continuación:

Supuesto (CUAL):

La modelación matemática apoyada en ACODESA favorece la construcción, traducción y refinamiento de representaciones semióticas en estudiantes de secundaria.

Hipótesis (cuan):

El grupo experimental tendrá puntajes significativamente más altos en el postest de sistemas de ecuaciones lineales que el grupo control.

3.4.3. Intervención.

El proceso de intervención se realiza tomando en cuenta las fases de ACODESA las cuales pueden abarcar una sesión o bien varias fases en una sola sesión según sea necesario; simultáneamente se recolectarán datos CUAL-cuan; para posteriormente realizar el análisis y valorar la efectividad de la secuencia, a continuación, se describe de forma general lo que se pretende hacer en cada fase:

1. Trabajo individual

Se inicia la intervención donde el estudiante abordará una situación problema la cual deba darle solución, en esta fase no se mencionará el tema de sistemas de ecuaciones, ni ningún tipo de concepto o procedimiento para hallar la solución; es el primer

acercamiento del alumno en su transición del problema real y las matemáticas, el algoritmo que utilice, sea una frase, una ilustración, una operación, un símbolo, letras, etc. será su primer registro semiótico; denominado en la metodología como representación espontánea que es significativo para el alumno en ese caso, en ese momento y en ese problema y no para otros; aquí lo interesante es que el alumno llegue a una solución de lo planteado.

2. Trabajo en equipo sobre la misma situación.

Como continuidad se reunirán en equipos donde la finalidad es que los estudiantes compartan sus ideas por las cuales llegaron a una solución anteriormente, estos equipos serán conformados de tres a cuatro integrantes donde se encuentren distintos tipos de hallar la solución con la intención de ver que sucede cuando los alumnos no tienen el mismo proceso y no están siguiendo un procedimiento como es en este caso un método de solución ya establecido; se crea el primer refinamiento del registro o se cambia a un único registro; según Hitt y Cortés (2009) es el proceso de validación junto con el debate donde los estudiantes defienden sus ideas y descartan errores ante otros procedimientos.

3. Debate (Puede convertirse en debate científico).

En esta fase puede presentarse una nueva situación en la que se trabaje de forma grupal, la finalidad es que los estudiantes hagan válidos los distintos procedimientos, y se apropien de ellos, bajo el supuesto de que ellos al crear sus propias matemáticas es más significativo y útil el aprendizaje. Se pretende guiar a los estudiantes a compartir sus procesos con otro que sea distinto y traten de explicar y justificar cada paso que siguieron; para obtener registros semióticos más concretos.

4. Autorreflexión.

Se plantea nuevamente la situación inicial; donde se espera ver si cambiaron sus procedimientos, si eligieron otro camino en el proceso de modelización o bien si existe una dosificación de su proceso con los que encontró con sus compañeros. También es menester revisar la respuesta no solo en el campo del modelo matemático; sino en el mundo real, que ha cambiado, llega a la misma respuesta o es algo totalmente distinto.

5. Institucionalización.

Si el proceso anterior obtuvo resultados favorables; es decir si hubo registros semióticos matemáticamente apropiados por el estudiante, usan y solucionan sistemas de ecuaciones sin hacerlos explícitos, ni seguir un método. Entonces se ha de presentar un sistema de ecuaciones como se establece en el libro de texto, se pueden tomar ejemplos de los registros obtenidos y traerlos al lenguaje algebraico propio.

3.4.4. Instrumentos y técnicas de recolección de datos CUAL-cuan.

De acuerdo con el diseño de esta investigación se hará uso de instrumentos y técnicas de recolección de datos cualitativos y cuantitativos durante la implementación de la secuencia didáctica como herramientas principales para los datos cualitativos se tiene el uso de audio-grabaciones de cada clase con el fin de evitar dejar detalles que pudieran tener relevancia hacia el tema de investigación; además de la observación participante donde se llevará un registro de los sucesos relevantes, posibles áreas de mejora, reflexiones y demás situaciones observadas en un diario de campo.

Para obtener datos que ayuden a cumplir los objetivos de esta investigación se emplearán entrevistas semiestructuradas con preguntas abiertas y a escala (tipo encuesta) con la finalidad de explicar lo que sucede de forma más clara, durante el proceso de modelación de sistemas de ecuaciones lineales. Por otra parte, se ha empleado un examen

diagnóstico y se pretende aplicar uno similar al final de las actividades (postest) para tener una conclusión más sólida de la efectividad de la modelación matemática en el contenido de sistemas de ecuaciones.

3.4.5. Descripción de variables.

Una variable, según Hernández Sampieri, Fernández-Collado y Baptista Lucio (2010) es *una propiedad que tiene una variación que puede medirse u observarse*, a continuación, se presentan las variables que dan orientación al análisis de este estudio, valorando la secuencia didáctica implementada.

Variable independiente:

La variable independiente en esta investigación corresponde a la intervención en el aula, es decir la secuencia didáctica que es diseñada bajo la metodología ACODESA y el proceso de modelación matemática, centrada en el tema matemático de sistemas de ecuaciones lineales. Esta variable es modificada y manipulada, ya que se encuentra estructurada por fases con el propósito de alcanzar determinados efectos deseados en el aprendizaje.

Variable dependiente:

La variable dependiente se compone de las representaciones semióticas y modelos matemáticos propuestos por los estudiantes para dar soluciones a las actividades planteadas además de las dificultades que presenten; de acuerdo con el supuesto de investigación, la implementación de la secuencia llevará a la construcción y transformación de representaciones semióticas que evidencien el proceso de modelación matemática y el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, tomando en cuenta las dificultades para tomarlas como referencia en futuras investigaciones.

3.5. Cronograma de actividades.

Para el control de las actividades que completan el presente trabajo que se llevó a cabo entre octubre de 2025 y mayo de 2026, se presenta el siguiente cronograma de actividades.

Tabla 1.

Cronograma de actividades para el desarrollo de la Investigación.

Actividad	2025			2026				
	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY
Planteamiento del problema y justificación.								
Revisión de literatura y análisis del Estado de conocimiento.								
Teoría de registros de representaciones semióticas.								
Modelización Matemática como estrategia didáctica.								
Construcción de objetivos y preguntas de investigación.								
Elección de la metodología, muestra e instrumentos de recolección de datos.								
Planteamiento de hipótesis y supuesto.								
Metodología (plan de acción y ACODESA).								
Aplicación del diagnóstico.								

Diseño de la secuencia didáctica.								
Aplicación de la secuencia en el grupo experimental y en el de control.								
Aplicación de los instrumentos de recolección de datos (entrevistas semiestructuradas y audiograbaciones de clases).								
Aplicación del Post-test.								
Transcripción de audio grabaciones.								
Elaboración del cronograma.								
Tecnología y puntos de equilibrio en la enseñanza de sistemas de ecuaciones.								
Análisis cuantitativo y cualitativo								
Conclusiones								
Revisión del documento y ajustes finales.								
Entrega y presentación del trabajo final.								

IV. Análisis preliminar.

Para alcanzar el objetivo central de esta investigación se pretende abordar los cuatro objetivos específicos, el primero de ellos es diagnosticar los conocimientos previos de los estudiantes para abordar el contenido de sistemas de ecuaciones lineales, además de identificar áreas de mejora dentro de los grupos para tomarlos en cuenta durante el diseño de la secuencia didáctica. Este apartado tiene el propósito de presentar los hallazgos encontrados al implementar la herramienta diagnóstica ubicando al docente en formación en el punto de partida de su intervención.

A continuación se presenta la forma en la que se diseñó el instrumento y el objetivo de cada tipo de reactivos, posteriormente se realiza una comparativa de acuerdo con los resultados obtenidos tanto en el grupo experimental como en el de control; la prueba diagnóstica consta de 15 reactivos comenzando desde una vista general hacia los conocimientos previos desde el álgebra hasta llegar a situaciones específicas que implican la construcción y solución de sistemas de ecuaciones, se han agrupado los reactivos en los siguientes indicadores (Ver anexo A):

- **Interpreta situaciones.** El alumno transita desde una situación planteada hacía un algoritmo matemático como son símbolos, letras u operaciones sin un procedimiento a seguir; puede señalarse como el primer registro ante la situación dando una solución matemática. (dos reactivos)
- **Conoce las bases operativas del álgebra.** Tienen conocimientos en operaciones con signo y propiedades de los exponentes las cuales son base en la habilidad de resolver sistemas de ecuaciones de acuerdo con los métodos establecidos. (cuatro reactivos)

- **Domina los conocimientos de linealidad.** Los estudiantes demuestran haberse apropiado de la solución de una ecuación lineal, su construcción y solución con operaciones aritméticas. (cuatro reactivos)
- **Plantea sistemas de ecuaciones.** Construyen y ordenan sistemas de ecuaciones lineales a partir de un problema. (tres reactivos)
- **Resuelve sistemas de ecuaciones.** Resuelven sistemas de ecuaciones a partir de una representación algebraica; es decir sin una situación solo el sistema de ecuaciones. (un reactivo)
- **Interpreta representaciones gráficas.** Identifican la solución del sistema de ecuaciones a partir de la intersección de dos rectas en un registro gráfico. (un reactivo)

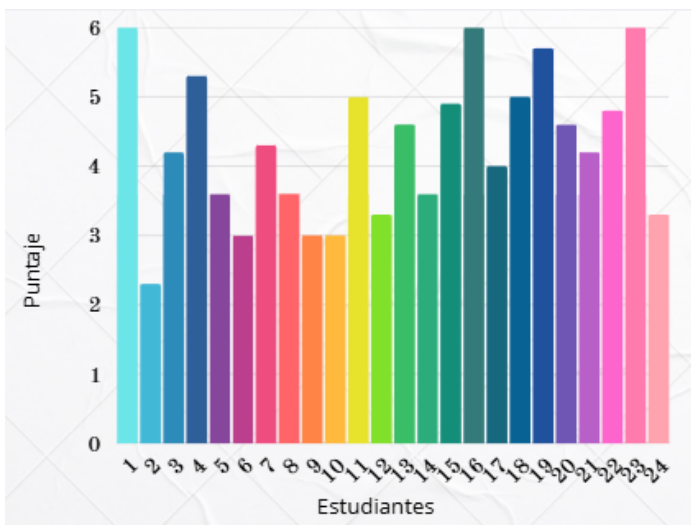
4.1 Resultados del diagnóstico.

Sobre los resultados obtenidos a continuación se presenta de forma detallada las diferencias entre el grupo de control y el experimental. El promedio general de ambos grupos fue de 3.5 con base 10 teniendo en total una muestra de 40 estudiantes.

El grupo experimental obtuvo un promedio de 4.1 teniendo a tres estudiantes con un puntaje aprobatorio mientras que la mayoría se centra en una calificación de 3 o 4 como se puede observar en la Figura 3.

Figura 3.

Promedios del diagnóstico en el grupo experimental.

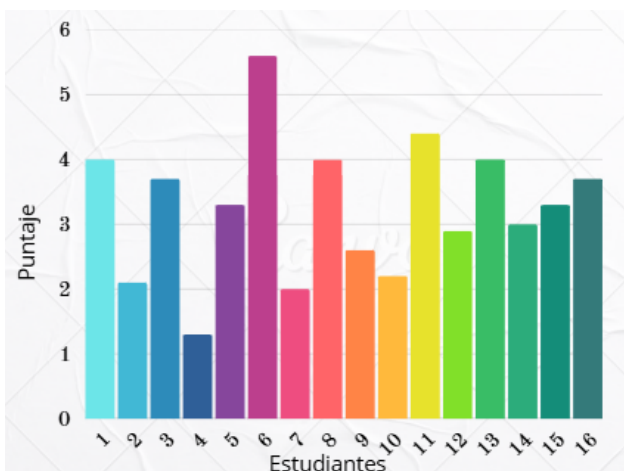


Nota: Elaboración propia.

Por otra parte el grupo de control alcanzó 3.2 en promedio general, donde a diferencia del experimental los resultados se encuentran dispersos en distintos niveles de puntuación, como se puede observar en la Figura 4, donde se presentan los resultados del grupo de control, con un rango de seis puntos, en este caso aprobó un solo estudiante con 7.3.

Figura 4.

Promedio del diagnóstico en el grupo de control.



Nota: Elaboración propia.

A continuación, se realiza una descripción del diagnóstico tomando en cuenta cada uno de los siguientes indicadores con los que se construyó el examen diagnóstico:

- **Interpretación de situaciones problema.**
- **Conocimiento de las bases operativas del álgebra.**
- **Dominio de los conocimientos de linealidad.**
- **Planteamiento de sistemas de ecuaciones.**
- **Resolución de sistemas de ecuaciones.**
- **Interpretación de representaciones gráficas.**

4.1.1. Interpretación de situaciones problema.

Reactivos:

- Representa en una operación matemática, que Juan es dueño de una tienda donde vende refrescos y jugos; donde al comprar un refresco y un jugo cuesta \$33, y si compras dos jugos son \$30.

Grupo de Control y Experimental:

Al ser una pregunta abierta se observaron diversas respuestas en ambos grupos; algunos dejaron sin responder, otros realizaron operaciones aritméticas como suma, resta y división y otros escribieron pequeños textos o palabras que identificaron como representativas del problema. En resumen, 7 estudiantes dieron una respuesta correcta, 9 dieron una respuesta incorrecta a lo que se plantea y 24 estudiantes omitieron su respuesta.

- La encargada de una cafetería quiere vender fruta esta semana, y ha comprado de dos tipos. Su hija le pregunta: - ¿mamá cuántas manzanas y cuántas naranjas compraste? la mamá le dice: - te voy a dar dos pistas para que encuentres cuántas manzanas y cuántas naranjas compré.

Primera pista: en total compré 68 frutas. Segunda pista: el número de naranjas es el triple que el número de manzanas. ¿Cuántas frutas compré de cada tipo?

- 51 manzanas y 18 naranjas
- 51 naranjas y 17 manzanas
- 13 naranjas y 20 manzanas
- 30 manzanas y 38 naranjas

Grupo de Control:

Los resultados obtenidos en este grupo se encuentran distribuidos en cada una de las respuestas, lo que lleva a una conclusión predeterminada de que los estudiantes solo eligieron una opción sin realizar un pequeño análisis como sucede en el grupo experimental, solo un 24% respondió de forma correcta el resto señaló otra opción o bien omitió su respuesta.

Grupo Experimental:

Se observa una cantidad considerable de estudiantes que resuelve un sistema de ecuaciones a partir de una situación problema, pues se tiene la necesidad de buscar dos números que cumplan con las dos pistas, aquí un 77% respondió de forma correcta, 14% respondió de forma incorrecta y un 9% omitió su respuesta.

El primer apartado comprende dos reactivos en los cuales el estudiante debía llegar a un registro algebraico no refinado a partir de una situación planteada en lenguaje natural; para el primer reactivo se formuló un ejercicio de respuesta abierta y el otro de opción múltiple representando algunas operaciones con letras; el segundo reactivo al ser de opción múltiple no permitió ver con claridad lo que pensaban los estudiantes pues la mayoría decidió omitir su respuesta o bien seleccionar más de una opción.

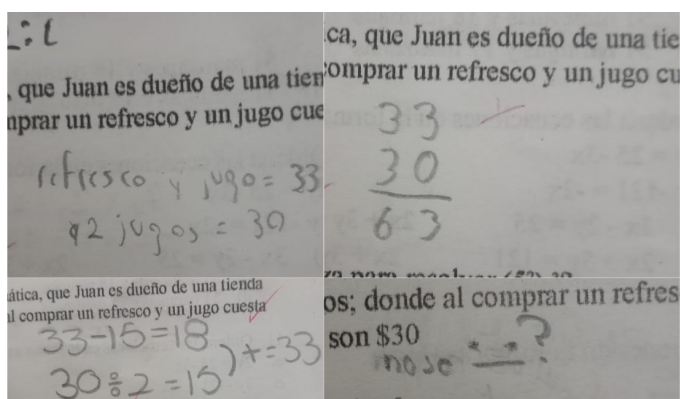
Otro es el caso del primer reactivo donde hay una indicación con respuesta abierta, el estudiante con sus propias palabras, símbolos o procedimientos representaría una

situación en Matemáticas hablando de éstas como un lenguaje; aunque más del 50% de los estudiantes omitió su respuesta se encontraron hallazgos interesantes con respecto a esta pregunta.

Algo interesante fue que al momento de estar aplicando esta prueba diagnóstica se indicó que si no conocían la respuesta a alguno de los reactivos no respondieron, pero como se observa en la Figura 5 algunos alumnos en este reactivo pusieron "no sé" donde, el no entender de los alumnos y la mayoría de las omisiones puede ser debido al planteamiento del ejercicio ya que se pedía traducir una situación a un lenguaje en matemáticas lo cual pudo haber confundido al no saber qué operación realizar o bien no tener un ejemplo a seguir como se hace tradicionalmente.

Figura 5.

Representaciones de los estudiantes de la situación “Jugo y refresco” en Matemáticas



Nota: Acervo personal

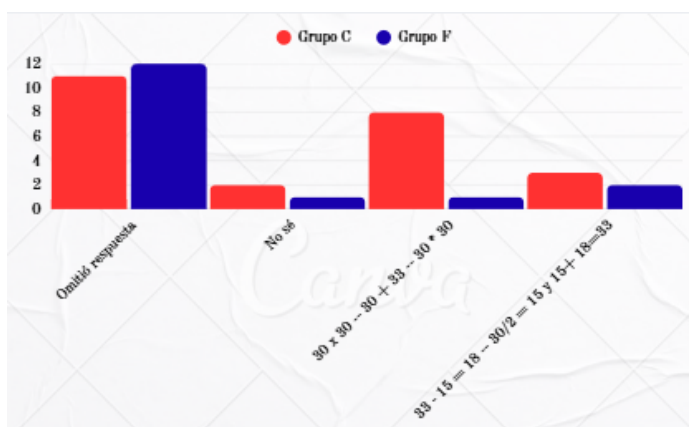
Por otro lado, se encontraron resultados donde el alumno identifica las cantidades en la situación en este caso 30 y 33 pero el alumno al no tener un procedimiento específico realiza cualquier operación, en su mayoría sumas, obteniendo 63 más cabe resaltar que en otros casos decidieron multiplicar o dividir. Finalmente se encuentran los resultados donde los estudiantes analizaron la situación y realizaron varias operaciones donde combinan

algunas frases como "dos jugos es igual a 30", "jugo y refresco = 33" "\$33 con refresco y un jugo \$30 dos jugos".

Además, se encontraron respuestas con operaciones aritméticas $30 - 15 = 18$ y $30 \div 2 = 15$ suman los resultados y obtienen 33; destacando que estas últimas respuestas se encontraron dentro del grupo experimental como se puede observar en la Figura 6. que el grupo experimental dejó más respuestas en comparación al grupo de control.

Figura 6.

Interpretación de situaciones problema.



Nota: Elaboración propia.

4.1.2. Conocimiento de las bases operativas del álgebra.

Reactivos:

➤ Para resolver 4^3 se multiplica 4×3 .

● Verdadero

● Falso

Grupo de Control:

estudiantes con una respuesta correcta y

Los resultados obtenidos en este reactivo

10 con una respuesta incorrecta.

para el grupo de control fueron 6

Grupo Experimental:

Para este grupo, en el reactivo se obtuvieron 19 estudiantes con una

respuesta correcta y 5 estudiantes con una respuesta incorrecta.

➤ ¿Qué propiedad de los exponentes se utiliza para resolver $(5^2)^3$?

- División de potencias
- Exponente negativo

- Multiplicación de potencias
- Potencia de potencia

Grupo de Control:

Se ha observado en este grupo que 7 estudiantes reconocen las propiedades de los exponentes mientras que 9 no logran diferenciarlas.

Grupo Experimental:

En este grupo 8 estudiantes conocen las propiedades de los exponentes, tema en el que se comienza a utilizar el lenguaje algebraico y 16 no logran diferenciarlas.

➤ ¿Cuál es el 25% de 300?

- 75
- 300

- 57
- 25

Grupo de Control:

En este grupo se observa que menos del 50% tiene conocimientos en operaciones básicas y que un 60% no tiene la percepción de lo que significa el 25% de algún número, entre ellos los que omitieron su respuesta.

Grupo Experimental:

A diferencia del grupo de control un 72% ha respondido de forma correcta, un argumento interesante de los estudiantes fue que el 25% es igual a un cuarto de la cantidad, y un 28% no respondió de

forma correcta, entre ellos los que omitieron su respuesta.

➤ Relaciona las operaciones con la respuesta correcta.

- $- 3 - 6 =$ 20
- $5(- 4) =$ - 9
- $5(4) =$ 42
- $- 13 + 15 =$ - 20
- $(- 6)(- 7)$ 2

Las observaciones que se realizaron en este grupo fueron que la mayoría de los estudiantes tienen conocimientos en operaciones con signos el mayor número de aciertos se registró en operaciones que tienen números positivos o con un solo paréntesis, además en ambos grupos alrededor de 6 estudiantes decidieron omitir este reactivo.

Grupo de Control:

Particularmente se observó que en los reactivos de menor dificultad 12 estudiantes respondieron de forma correcta, en los de mayor dificultad 3 acertaron y 1 estudiante no acertó en ninguna operación.

Grupo Experimental:

Los hallazgos en este grupo fueron distintos, ya que a pesar de que la indicación decía relacionar operaciones con respuestas los estudiantes agregaron otras respuestas; ejemplo: $- 3 - 6 = 3$ o $5(- 4) = 1$, además 10 estudiantes obtuvieron respuestas correctas en todas las operaciones.

4.1.3. Dominio de los conocimientos de linealidad.

Reactivos:

- De las siguientes ideas. ¿Cuál define mejor a una ecuación?
- Es un conjunto de letras y números.
 - Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
 - Es una expresión que tiene un exponente.

Grupo de Control:

Se ha observado que los estudiantes no reconocen a una ecuación como un concepto, 9 respondieron que es un conjunto de letras y números, mientras que solo 2 seleccionaron que es la igualdad, 3 respondieron que tenían que ver con exponentes y 2 omitieron su respuesta.

- Elige la opción que es un ejemplo de ecuación lineal

- $2x^2 + 3x - 35 = 0$
- $2x + 5 = 27$

Grupo de Control:

En este reactivo se observa que 10 estudiantes respondieron de forma

Grupo Experimental:

En este caso sucede algo diferente al grupo de control, pero por la misma razón, las respuestas se encuentran repartidas en las tres opciones, 8 dicen son letras y números, 8 que es una igualdad y 8 que tiene que ver con exponentes.

- $x^3 + 3x^2 = 100$

incorrecta y 2 omitieron su respuesta mientras que 4 eligieron una respuesta acertada.

Grupo Experimental:

Para el grupo experimental se observa un caso similar al de control pues 15 estudiantes respondieron de forma

incorrecta y 4 omitieron su respuesta mientras que solo 5 eligieron la opción correcta

➤ Al pensar en un número, le sume 15 y obtuve como resultado 27. ¿Cuál es el número que se pensó?

- 15
- 12
- 27
- 42

Grupo de Control y Experimental:

Este reactivo fue formulado a modo de adivinanza y es uno de los que alcanzaron el mayor número de respuestas correctas; en el grupo de control un 76% respondió correctamente y en el grupo experimental tiene un 92% de aciertos.

➤ El perímetro de un pentágono es de 80 cm. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?

- 10cm
- 16cm
- 8cm
- 5cm

Para este caso sucede algo parecido que el reactivo anterior al ser un ejercicio de ecuación lineal aplicado en una figura es entendible para los estudiantes lo que lo lleva a una interpretación más completa y por ende una respuesta acertada; en el grupo experimental se registran 21 aciertos de 24 estudiantes y en el grupo de control 10 de 16 estudiantes.

4.1.4. Planteamiento de sistemas de ecuaciones.

Reactivos:

➤ Ordena las ecuaciones en la forma $ax+by=c$

o $2y = 25 - 3x$

o $3y - 121 = -2x$

• $3x - 2y = 25$

$2x + 3y = 121$

• $2x + 3y = 121$

$2x + 3y = 121$

• $3x + 2y = 25$

$2x + 3y = 121$

➤ Encuentra las ecuaciones que representan la siguiente situación.

Un alumno pagó \$30 por un sándwich y un café en la cafetería de la escuela. Hallar el precio de cada producto si el sándwich vale el doble que el café.

• E1. $s + c = 30$ E2. $s = 2c$ • E1. $s + 2c = 30$ E2. $s = 2c$

• E1. $s + c = 30$ E2. $s = c$

➤ Encuentra las dos ecuaciones del siguiente problema.

La edad de Antonio y Luis suman 34 años, y tres veces la edad de Antonio menos la edad de Luis es 22.

• E1. $A + L = 34$

E2. $A - L = 22$

• E1. $3A + L = 34$

E2. $A + L = 22$

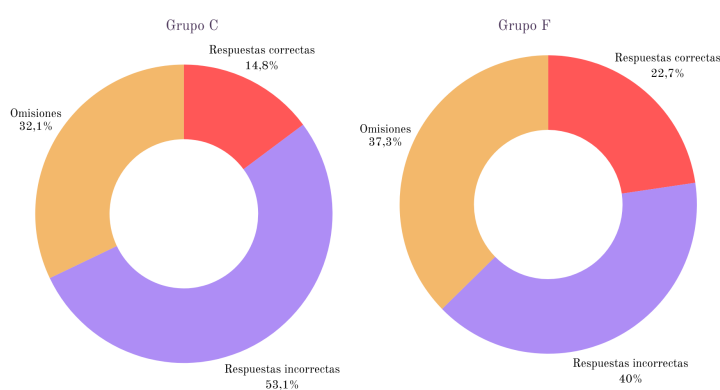
- E1. $A + L = 34$

E2. $3A - L = 22$

Este apartado tuvo en su mayoría respuestas erróneas y omisiones por parte de ambos grupos, mientras que en promedio 5 alumnos han respondido de forma correcta como se muestra en la Figura 7.

Figura 7.

Planteamiento de sistemas de ecuaciones.



Nota: Elaboración propia.

4.1.5. Resolución de sistemas de ecuaciones.

Reactivos:

➤ Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

o E1. $5x + 3y = 370$

o E2. $3x + 3y = 270$

- $x = 120 \quad y = 150$

- $x = 30 \quad y = 60$

- $x = 50 \quad y = 40$

Grupo de Control:

En este reactivo 10 estudiantes omitieron su respuesta, 2 respondieron de forma correcta y 4 señalaron opciones equivocadas.

Grupo Experimental:

En este grupo en varias ocasiones los estudiantes agregan respuestas a pesar de ser de tipo opción múltiple, 14 omitieron su respuesta y 9 respondieron incorrectamente y uno acertó.

4.1.6. Interpretación de representaciones gráficas.

Reactivos:

➤ Observa la gráfica donde se representan las ecuaciones:

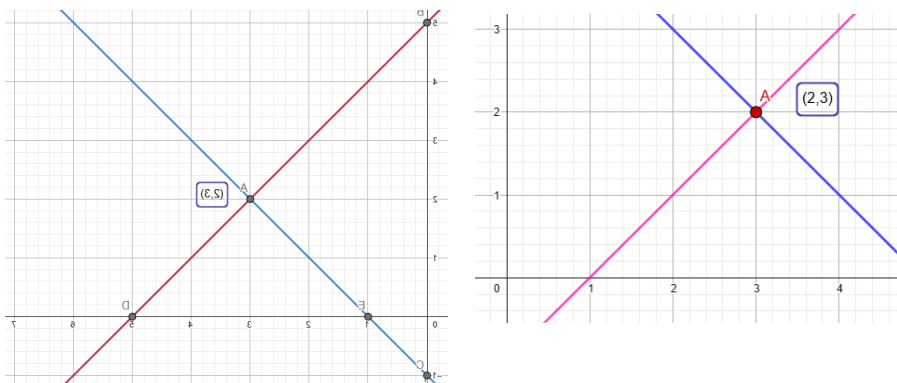
o $y = x - 1$

o $y = -x + 5$

Determina los valores en (x) y en (y)

Figura 8.

Representación gráfica de las ecuaciones.

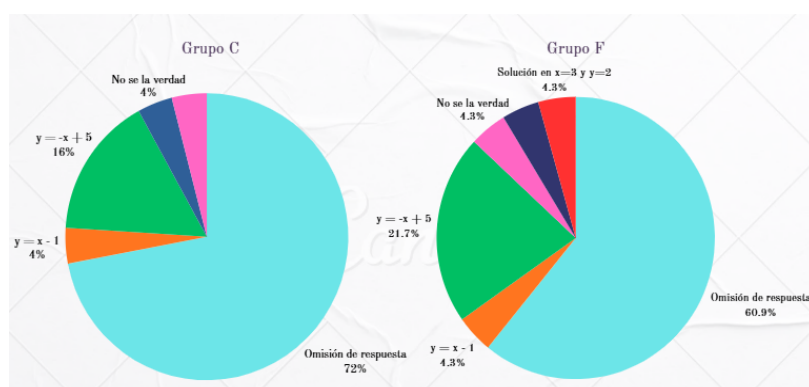


Nota: Elaboración propia.

Relacionado con la interpretación gráfica los estudiantes aún desconocen totalmente como hallar la solución de un sistema de ecuaciones en x y y a partir de dos rectas en un plano cartesiano por lo que alrededor de 16 estudiantes en ambos grupos omitieron su respuesta y un solo alumno dentro del grupo de control respondió correctamente, como se muestra en la Figura 9.

Figura 9.

Interpretación gráfica durante el diagnóstico.



Nota: elaboración propia.

Síntesis de los resultados

Los resultados obtenidos ante la prueba diagnóstica dejan ver las características de cada grupo, pues mientras en el grupo experimental las respuestas son más uniformes; el grupo de control muestra una numeración más dispersa, algunos aspectos que ocurren en ambos grupos es que existe un mayor número de aciertos en preguntas donde no se cuestiona directamente por una expresión matemática, un procedimiento o un concepto,

dejando ver que una persona puede resolver un problema que implica una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones a partir de una representación en lenguaje común.

Al momento de aplicar este instrumento salen a la luz diversas creencias que tienen las personas con respecto a una clase de matemáticas o a las matemáticas, como es que, al hablar de una ecuación, de una letra en una operación, de un número con signo negativo, incluso observar una gráfica, es traducido como imposible, complicado, o sólo un integrante del aula lo va a resolver.

V. Plan de acción.

5.1. Consideraciones para estructurar el plan de acción.

La elaboración de actividades, dentro de la metodología ACODESA, implica una estructuración de manera que favorezca la producción de representaciones funcionales de sus correspondientes representaciones externas y procesos de conversión entre representaciones; además, Hitt y Cortés (2009) mencionan que en la metodología ACODESA, la manipulación de materiales y trabajo con papel y lápiz es sumamente importante. (pág. 10)

El diseño de la intervención se llevó a cabo con base en el ejercicio de la modelación matemática, y siguiendo lo que proponen los autores que hablan de la metodología ACODESA como ideal para modelar una situación:

Lo que se quiere con el plan de acción es proponer situaciones contextualizadas que le sirvan como base a los estudiantes para que traten el tema de sistemas de ecuaciones en sus distintas representaciones: lenguaje común, lenguaje algebraico y representación gráfica, que las soluciones sean representativas a la solución del problema, sin la necesidad de memorizar los pasos de un método sino emplearlos, como puede ser sustitución, igualación o suma-resta.

Se planea trabajar el tema durante 8 sesiones, planteando 3 situaciones diferentes; las características bajo las cuales se diseñaron las situaciones problema son las siguientes.

- Deben surgir de un contexto del mundo real (Compra-venta, estadísticas, transporte, deportes, o alguna actividad cotidiana).
- La redacción del problema debe carecer de una solución, pero no pedir literalmente un sistema de ecuaciones, ni literalmente un algoritmo matemático.

- Con base en los resultados del diagnóstico, debe formularse la situación de acuerdo al nivel cognitivo de los alumnos, pues como plantea Blum y Borromeo (2009) si la situación problema requiere de una solución con un proceso muy complejo o bien no del nivel de los alumnos puede ocasionar que los alumnos no logren una representación primitiva de los sistemas de ecuaciones o bien pierdan el interés pues verán poco alcanzables los resultados.
- De acuerdo con Obando y Muñera (2003) cada situación debe trabajar en sí misma lo particular, es decir, de lo que se quiere que aprendan acorde a la fase que se está trabajando, como puede ser una situación sencilla o un punto de equilibrio; y lo general que es lo propio de todos los sistemas de ecuaciones, como es el grado de la ecuación, las dos incógnitas, dos soluciones, etc.
- Que en su estructura impliquen dos incógnitas y que finalmente la solución se aterrice en lo real, es decir en lo que hace al problema ser y no quedar en la solución del modelo matemático.

Para comenzar a plantear las situaciones y la forma en la que estas se han de estructurar es necesario realizar una aclaración de cómo se manejan las fases de la metodología y la estrategia de implementación como se muestra en la Tabla 1 y la Tabla 2, por ello se han diferenciado en distintos colores, los cuales se describen a continuación:

Tabla 2.

Leyenda de las fases de la metodología y la estrategia.

Las fases marcadas en color azul celeste corresponden a dónde los estudiantes tienen su primer acercamiento con las situaciones y trabajan de forma individual.

La fase en azul aciano corresponde a la matematización pues esta se encuentra entre el trabajo individual y el trabajo en equipo con la finalidad de establecer el modelo matemático con el que se resolverá la situación.

Las fases en azul claro representan el trabajo en equipo, y un primer intercambio de ideas para la validación de procesos entre los mismos miembros del equipo.

El color naranja oscuro se eligió para identificar las fases de trabajo grupal, el debate y la validación de las representaciones refinadas.

La fase color magenta corresponde a la institucionalización, donde el profesor deja de ser guía y aterriza el trabajo de los estudiantes.

Cada una de las situaciones que se plantean a continuación debe ser sometida simultáneamente a los dos recorridos, con la metodología la cual según Hitt y Cortés (2009) es ideal en las primeras fases del proceso de modelación matemática pues permite la creación de modelos matemáticos o representaciones semióticas con las cuales se pueden alcanzar soluciones a lo que se plantea, y dentro de la estrategia que es la modelación las partes correspondientes a la estructuración, matematización, el trabajo matemático y la interpretación dependen del camino que los alumnos tomen al momento de querer dar una solución.

Tabla 3.

Tabla de Fases interrelacionadas (modelación y ACODESA)

Fases de Modelación Matemática según Bloom y Borromeo Ferri.

Construcción	Estructuración	Matematización	Trabajo matemático	Interpretación	Validación	Exposición
Fases de la metodología ACODESA						
Trabajo Individual	Trabajo en equipo	Debate		Autorreflexión	Institucionalización	



La formulación de las siguientes situaciones ha tenido un trasfondo en el que se pretende llevar una progresión en cuanto a la construcción del tema que es un sistema de ecuaciones, la primera es un problema sencillo con ecuaciones lineales para un primer acercamiento, en el segundo se pretende comprendan el sistema de ecuaciones en la graficación de dos funciones y hallar el punto de equilibrio y finalmente una situación donde se comience o exista una representación gráfica desde la oferta y demanda, además de hacer uso de GeoGebra como una herramienta que impulse el aprendizaje.

5.2. Diseño de actividades.

La idea de la modelación como la intervención y uso de un modelo matemático para poder laborar en un fenómeno cualquiera existente en el mundo, que los registros de representación semiótica son los signos que ayudan a ver lo que no tiene imagen, que le sirven a la persona que los crea y utiliza, tanto el modelo como el signo; como menciona Arrieta y Diaz (2015), una herramienta matemática es útil para quien sabe que se utiliza, como se utiliza y por qué se utiliza como son unos análisis clínicos, para el paciente son solo un requisito; pero para el doctor son el instrumento con el cual dará acción a lo que se necesita.

Encontrando la motivación de estas actividades, que es buscar una forma de enseñar y resolver sistemas de ecuaciones a partir de situaciones planteadas en el mundo real sin

explicar los métodos de solución ya establecidos y que solo propician seguir una serie de pasos.

La primera tarea en la creación de esta secuencia ha sido la búsqueda de lugares y aspectos que nuestra muestra identifique en su entorno, acudiendo a actividades que sucedan cerca de ellos o que alguien cercano pueda experimentar; con el fin de que los modelos utilizados sean realmente significativos, la segunda plantear un sistema de ecuaciones que ayude a dar una solución o a entender cómo suceden los fenómenos encontrados y la tercera secuenciar las actividades de modo que se llegue al uso de los puntos de equilibrio en una gráfica de oferta-demanda.

El camino a la escuela, el cobro del pasaje, el uso de distintos medios de transporte y el intentar ahorrar es lo que vive diario el alumno, es por ello que se decidió comenzar con una situación que implica estas características, tratando de desarrollar las primeras representaciones en los estudiantes y llegar a una solución sin seguir un ejemplo o procedimiento.

En la zona donde se encuentra ubicada la escuela existen diversos negocios a los cuales pertenecen las familias de los estudiantes como son fruterías, tiendas de abarrotes, ventas de comida (desayunos, tacos, tamales, licuados, etc.), tiendas de ropa y negocios muy demandados actualmente en este lugar; las estéticas y barberías.

Poner un negocio como entrada principal o segunda entrada de recursos en una familia es algo común, por ello las actividades 2 y 3 muestran características de esta situación, dejando que el estudiante haga suyo el problema y presente soluciones matemáticas y situadas en su propia experiencia. Encontrando un equilibrio entre lo que se

compra y se vende, entre los gastos e ingresos, la cantidad de clientes o de ventas en las que, a partir de ese número, el negocio es rentable.

Finalmente, para la fase de la institucionalización se ha ocupado el software GeoGebra como una herramienta en la que los estudiantes puedan visualizar sus representaciones, y reconozcan en la forma algebraica y gráfica, los sistemas de ecuaciones, los cuales han de haber resuelto previamente.

5.3. Estructura del plan de acción.

Tabla 4.

Campo disciplinar en el que se aplica el plan de acción.

Campo formativo:	Saberes y Pensamiento Científico
Disciplina:	Matemáticas
Contenido:	Ecuaciones lineales y cuadráticas
Proceso de Desarrollo de Aprendizaje:	Modela y soluciona sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por algún método para dar respuesta a un problema.

Situación 1. De camino a la escuela.

Tabla 5.

Plan del primer ciclo de modelación.

Intenciones. ➤ Comprender la situación desde los precios y transportes. ➤ Concebir representaciones propias de los estudiantes para hallar la solución. ➤ Identificar incógnitas desde un sentido de utilidad a partir de la producción de representaciones semióticas. ➤ Construcción de un primer sistema de ecuaciones	Evidencia. Primera representación. Procedimiento y solución del problema.	Material. Boletos de transporte.
---	--	--

1. Ana utiliza dos transportes para llegar a su secundaria durante toda la semana. Uno de ellos es el autobús que la deja en la escuela que cobra \$13 por viaje, y el metro que le cobra \$6 pesos. Ella quiere ahorrar algunos pesos ya que últimamente ha aumentado el precio de los transportes; ha observado que realiza 23 viajes en total y que gasta \$222 en una semana.

a) ¿Cuántos viajes realizó en autobús y cuántos en metro?

b) ¿Qué le recomendarías a Ana para ahorrar un poco más durante la semana?

Descripción de la actividad con la metodología ACODESA.

Las preguntas que aparezcan durante la descripción de cada una de las actividades han de servir como base de las entrevistas semiestructuradas.

Trabajo individual.

Se presenta la situación a los estudiantes de forma individual, y se pide que

encuentren una solución, este es un momento donde normalmente surgen las primeras dudas, el profesor comenzará su función como guía, mostrando solo lo elemental para hallar una solución, además de registrar todos los procedimientos que hayan realizado. Después de determinado tiempo se espera que la mayoría encuentre la respuesta que son 12 viajes en autobús y 11 en metro.

- ¿Qué procedimiento seguiste para saber cuántos viajes hizo de cada transporte?

Trabajo en equipo.

Al iniciar esta fase se organizan los equipos y como primer punto se les pedirá compartir la forma en la cual encontraron la solución. Después, se trabaja con el material donde se entregan boletos para transporte, la tarea es diferenciar uno de otro, para que después puedan, en equipo, representar la cantidad de viajes en los dos transportes y el total que pagó bajo los mismos boletos. En cada boleto deberán agregarle una señal que diferencie entre los de autobús y de metro; esto con la finalidad de comenzar a reproducir símbolos los cuales dan paso a la formalización de las dos incógnitas.

- ¿Fue igual o diferente el procedimiento entre el equipo?
- ¿Qué semejanzas y diferencias hubo?
- ¿Cómo eligieron entre sus registros al correcto?
- ¿Qué símbolos utilizaron para diferenciar entre los boletos que son de autobús y los que son de metro?

Debate.

Antes de iniciar con el primer debate es bueno ejemplificar lo que es un debate y cómo funciona, además de lo que se quiere lograr, argumentando cada uno su procedimiento, es la parte de la validación donde los estudiantes deben decidir qué sí y que

no y por qué, en una discusión colectiva.

Para esta etapa se trabajará de forma grupal donde por equipos presenten sus procedimientos y soluciones, es decir, las interpretaciones propias y validaciones que realizaron durante el trabajo en equipo, el papel del docente es fijarse en los procedimientos que no solo sean operaciones, sino símbolos y representaciones no refinadas que den pie a la construcción de las dos ecuaciones. Para finalizar esta etapa, probablemente no se utilicen letras literales, símbolos matemáticos, se trata que el alumno sienta la posibilidad de poder encontrar soluciones y defienda su procedimiento, y se tomarán como incógnitas los símbolos que hasta el momento tienen sentido para los estudiantes.

Autorreflexión.

El regreso a lo que se trabajó de forma individual pretende refinar lo que se hizo inicialmente contrapuesto a lo que realizaron de forma grupal, se replantea la situación y se cambia un dato, como es la cantidad de viajes en lugar de veintitrés viajes sean veintiséis y pague a la semana \$ 233.

- Complementar con sus propias palabras ¿por qué realizó ese procedimiento? y ¿por qué cree que es correcto?

Situación 2. Mi nuevo negocio.

Tabla 6.

Plan del segundo ciclo de modelación.

Intenciones.	Evidencia.	Materiales.
		Tabla de análisis entre ingresos y costos.

➤ Indagar en un problema de sistemas de ecuaciones desde los ingresos y gastos de un negocio. ➤ Acercamiento a un costo fijo y uno variable. ➤ Exploración del software GeoGebra. ➤ Mostrar algunas funciones de GeoGebra.	Procedimiento donde se encuentra una solución. Tabla de análisis.	Tarjetas de los distintos pagos.
---	---	---

2. En la colonia Rural del Atlas, Mateo ha abierto una barbería ya que ha visto que los cortes de caballero son un buen negocio, cobrando \$150 a cada cliente; ha conseguido un local donde debe pagar \$2500 a la semana con la renta del local y los servicios de agua y electricidad; además por cada corte que realiza gasta \$30 pesos en materiales como gel, talco y navajas.

Ayuda a Mateo para averiguar ¿A los cuántos cortes comenzaría a obtener un poco de ganancias?

Descripción de la actividad con la metodología ACODESA.

Trabajo en parejas.

Iniciar nuevamente con las fases de ACODESA, esperando los estudiantes se encuentren un poco más familiarizados con la secuencia. Primero se comienza por una petición, ayuda a quien necesita o carece de una solución, en este caso, cuando se necesita analizar los gastos e ingresos de un negocio. El trabajo se ha de concentrar en aclaraciones sobre lo que es el costo, que son los ingresos, que significa tener ganancias, etc. En esta

fase siempre se ha de pedir el registro de todo el procedimiento, es decir el modelo matemático por el cual el estudiante piensa obtener una solución.

- ¿Qué quiere decir, cuando se dice que se comienzan a obtener ganancias?
- ¿Qué procedimiento has seguido para saber cuántos cortes debe realizar?
- ¿Por qué decidiste usar ese procedimiento?

Trabajo en equipo.

Posteriormente organizados en equipos diferentes a los de la primera actividad, se brinda un espacio para compartir y contrastar los procedimientos, seguido de esto se les proporcionará una tabla, donde completen valores dependiendo de ciertos números de cortes, pretendiendo observar el comportamiento del ingreso-costo, además de corroborar si el punto donde se igualan, es la respuesta que ellos mismos dieron.

- ¿Cómo fue su procedimiento en comparación con los otros?
- ¿Qué hicieron para elegir lo que estaba bien o estaba mal?
- ¿Tenían la misma respuesta?
- ¿Qué pasa cuando aumenta el número de cortes?

Debate.

Formados en herradura y ya entendiendo cómo funciona el debate, refinar los procedimientos realizados y establecer las ideas que sean compartidas, seguido de eso con ayuda del docente se realizará el llenado de la tabla de análisis, para observar a partir de qué cantidad se comenzará a ganar, es decir, guiar a la necesidad de visualizar de otra forma los procedimientos, además de pedir a los estudiantes exploren el software GeoGebra y registren las funciones que se les hagan interesantes.

Figura 10.

Tabla de análisis “Mi nuevo negocio”

NÚMERO DE CORTES REALIZADOS	¿CUÁNTO DINERO COBRA?	¿CUÁNTO DINERO GASTA?	GANANCIA
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			

Nota: elaboración propia.

- ¿Conocías el software GeoGebra?
- ¿Te ayudó observar la gráfica para comprender cuando se comenzó a obtener ganancias?

Autorreflexión.

Regresar a la misma actividad, y pedir que escriban cuál sería una forma más sencilla de resolver el ejercicio de acuerdo con lo que se trabajó durante las fases anteriores. Y responder el ejercicio en la siguiente variación; si ahora la renta y servicios aumenta a \$3000.

Situación 3. Venta de ropa

Tabla 7.

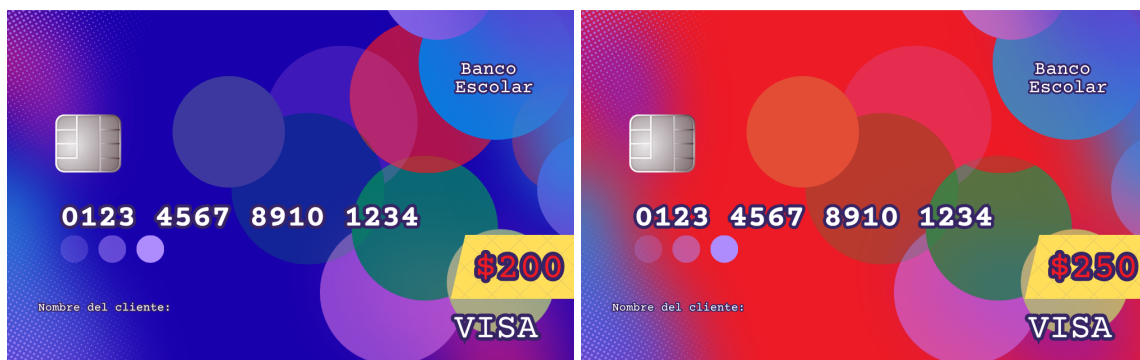
Plan del tercer ciclo de modelación.

Intenciones.	Evidencia.	Materiales. Tarjetas de crédito simuladas en compras
--------------	------------	--

➤ Indagar en un problema con sistemas de ecuaciones desde un punto de equilibrio. ➤ Resolver un sistema de ecuaciones. ➤ Realizar una representación gráfica en GeoGebra.	Construcción de un sistema de ecuaciones de oferta y demanda. Capturas de pantalla en Geogebra.	de \$200 y \$250 y un registro de las transacciones.
--	---	---

Figura 11.

Tarjetas de crédito “ventas con tarjeta”



Nota: elaboración propia.

3. Se acaba de abrir una tienda de ropa, el dueño se ha percatado que debe realizar algunos ajustes en la compra de playeras y el precio en el que las vende, por lo que ha llevado un registro en una libreta y en los reportes de pagos con tarjeta y a concluido en las siguientes ideas:

- Cuando el precio era de \$250, vendió 30 playeras; después bajó el precio a \$200 y se vendieron 50 playeras.
- Si vende a \$200 las playeras, puede surtir 20 piezas y cuando el precio está en \$250, puede surtir 40 playeras.

El dueño necesita de tu ayuda para que le recomiendes, ¿cuál debe ser el precio de las camisas para que sea el mismo número de camisas que se venden que los clientes que compren?

Figura 12.

Tabla de análisis “Venta de playeras”

REGISTRO DE VENTAS		
PRECIO \$	PLAYERAS VENDIDAS	PLAYERAS QUE PUEDE SURTIR
\$ 200	50 PZS	20 PZS
\$ 250	30 PZS	40 PZS

Nota: elaboración propia.

Descripción de la actividad con la metodología ACODESA.

Trabajo individual.

Presentar la situación de la venta de ropa, en este caso se necesita saber cuántas playeras comprar y a qué precio venderlas, viendo un punto de equilibrio en las ventas de una pequeña empresa. Los estudiantes deben elegir un proceso para registrar los pagos con tarjetas, buscando que los estudiantes establezcan relaciones entre los datos con un modelo matemático para poder intervenir sobre la situación.

Trabajo en equipo.

Organizar el aula en equipos distintos a los dos anteriores, realizando el proceso de comparación y validación de los procedimientos. En esta parte se les proporcionarán tarjetas de crédito simuladas con los distintos pagos y el registro de las ventas, con la finalidad de llegar a una representación física de la situación y hallar una solución. El

propósito de las tarjetas es la visualización con objetos reales y cotidianos en la oferta y demanda.

Debate.

Expondrán por equipo cuál fue el proceso que se creyó correcto, así como el modelo matemático que utilizaron para hallar el precio de las camisas, finalmente en plenaria discutir cual de todos los procedimientos representa mejor lo que se quiere encontrar, qué es el punto de equilibrio, además de discutir si existe una forma más fácil de representar los resultados obtenidos.

Autorreflexión.

Se lleva a cabo el regreso a la situación inicial, donde volverán a dar una solución dentro del mundo real y no matemáticamente; además, deberán representar en GeoGebra el registro de la oferta y demanda para saber a qué precio vender las playeras, esta parte se une con la institucionalización al regresar con las demás actividades para la visualización de todas las soluciones.

Fase de institucionalización.

Al final durante el cierre de cada ciclo de modelación el papel del profesor es clave e indispensable como en los momentos donde su función es ser guía, aquí se dan las formalizaciones del conocimiento, como que las representaciones creadas son válidas al obtener un buen resultado, hallar una forma que de pie a lo que es el sistema de ecuaciones y estructurarlo en su forma general ya sea con x y y o según el caso, además de explicar las soluciones en los puntos de intersección de las gráficas realizadas.

- Apoyarse siempre en la siguiente pregunta para tratar de llegar a una representación de los sistemas de ecuaciones más refinada: ¿habrá alguna forma más fácil de

representar las operaciones, tablas, dibujos, escritos o cualquier procedimiento que se haya realizado?

5.3.1. Diseño de intervención del grupo de control.

Por otra parte, en el grupo de control se trabajó bajo una secuencia diseñada en los métodos de solución preestablecidos para este grado, que son el métodos de sustitución, igualación y suma-resta, iniciando cada uno de estos con un problema no contextualizado para la formulación de un sistema de ecuaciones y posteriormente seguir los pasos de algún método de solución y para aterrizar cada uno la solución de otro sistema de ecuaciones ya sea este a partir de un problema o ya desde el principio formulado.

Cada una de las actividades son guiadas a partir del trabajo individual para la resolución de cada problema y el trabajo grupal para el aterrizaje de lo aprendido durante el método, la intención de esta secuencia es que al concluir con el tema los estudiantes logren formular un sistema de ecuaciones a partir de un problema dado, es decir la traducción del lenguaje común al algebraico de una misma información y a su vez apliquen al menos un método para la solución de sistemas de ecuaciones. En la Tabla 8 se presenta el diseño del plan de acción para la intervención en el grupo de control.

Tabla 8.

Intervención de control.

SESIÓN	MÉTODO	ACTIVIDAD
Sesión 1	Introducción	• Se comenzará la sesión con puntos generales sobre la forma en que se ha de trabajar durante los siguientes días. • Se recalca la importancia de este proceso de

		desarrollo de aprendizaje (PDA) en su aprendizaje y evaluación, por lo que su atención es fundamental. ● Se informa sobre la forma de evaluar. Llevados los acuerdos de la clase se comenzará por dar a conocer la forma de los sistemas de ecuaciones y los métodos que se han de implementar durante las sesiones. Después se inicia a resolver un sistema de ecuaciones, aún sin ningún método en particular a partir de un problema el cual es el siguiente: <i>La encargada de una cafetería quiere vender fruta esta semana, y ha comprado de dos tipos. Su hija le pregunta:</i> <i>-¿mamá cuántas manzanas Y cuántas naranjas compraste?</i> <i>La madre le dice: -te voy a dar dos pistas para que encuentres cuántas manzanas y cuántas naranjas compré.</i> <i>Primera pista: en total compré 68 frutas. $x + y = 68$</i> <i>Segunda pista: el número de naranjas es el triple que el número de manzanas. $x = 3y$</i> <i>¿Cuántas frutas compré de cada tipo?</i> <i>Manzanas: 17 manzanas</i> <i>Naranjas: 51 naranjas</i> Se dará el espacio para que los alumnos intenten resolverlo.
Sesión 2	Introducción	De manera grupal, se explicará que para resolver este tipo de tareas se necesita, un par de números (número de manzanas y número de naranjas) que cumplan con las dos pistas: Se tomará a x como número de naranjas. Se tomará a y como número de manzanas.

1. Un par de números que cumplan la primera pista

Número de naranjas: x	Número de manzanas: y	Pareja (x, y)
34	34	$(34, 34)$
35	33	$(35, 33)$
40	28	$(40, 28)$
50	18	$(50, 18)$
51	17	$(51, 17)$
60	8	$(60, 8)$

Ecuación de la pista 1: $x + y = 68$

2. Un par de números que cumplan la segunda pista.

Número de naranjas: x	Número de manzanas: y	Pareja (x, y)
30	10	$(30, 10)$
33	11	$(33, 11)$
36	12	$(36, 12)$
39	13	$(39, 13)$
60	20	$(60, 20)$
45	15	$(45, 15)$
51	17	$(51, 17)$

		Ecuación de la pista 2: $x = 3y$ Solución: 51,17
Sesión 3	Sustitución	Método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se les dará un problema para que se comience a desarrollar el PDA en los alumnos. Antes de iniciar se dará a conocer el método que se trabajará durante esta sesión y se iniciará con el siguiente problema: <i>La edad del abuelo de Marcos es igual a cuatro veces la edad de Marcos. La suma de sus edades es 70 años.</i> En este espacio los alumnos determinarán: • ¿Qué es lo que busca el problema? • ¿A quién corresponde x y y? • ¿De qué manera puede obtener una solución? • Los alumnos tratarán de dar su propia solución. Una vez que se han determinado las ecuaciones: E1: $x = 4y$ E2: $x + y = 70$ Habremos llegado a este sistema de ecuaciones y se comenzará a resolver por el método de sustitución que se presenta a continuación. 1. Se identifica o se despeja una variable. 2. En la otra ecuación se sustituye la literal por su valor. 3. Se resuelve la ecuación de una incógnita. 4. Para encontrar el valor de la otra variable se sustituye el valor hallado en cualquier ecuación. 5. Se realiza la comprobación en ambas ecuaciones.

Sesión 4	Sustitución	Para actividad en clase se les plantea el siguiente problema: <i>Imagina que es tu cumpleaños y una amiga de tu mamá le pregunta: -¿Cuántos años cumple el (a) joven? Para ocultar tu edad, le contestó.</i> <i>-La edad de mi hij@ y la mía suman 72 años. Pero su edad es 2/7 de la mía.</i> Lo que se debe responder usando el método de sustitución es: • ¿Cuántos años está cumpliendo? • ¿Cuántos años tendrá la madre? Se resolverá la ecuación ya sea en grupo o bien por medio de participaciones antes de finalizar la clase. Para concluir con este método se asignan dos sistemas de ecuaciones para resolver: E1: $x + y = 55$ E2: $y + 2 = 2x$ E1: $2x - 8y = 2$ E2: $x = -4y$
Sesión 5	Reducción	Método de reducción para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En esta sesión se iniciará con un nuevo método para resolver sistemas de ecuaciones, se retomará un problema que tiene relación con un proyecto de taller. <i>Los alumnos han realizado una colecta de libretas usadas para crear nuevas y darles una segunda vida.</i> <i>Una alumna ha donado cinco libretas de raya y tres cuadriculadas, de estas salieron 425 hojas en total.</i> <i>La maestra les ha dicho que si les hubiese dado tres de raya y tres cuadriculadas hubieran sacado 309 hojas.</i> De manera grupal se les pedirá usar la letra x para

		representar la cantidad de hojas de raya y la letra y para las hojas de cuadro y encontrar las dos ecuaciones. E1: $5x + 3y = 425$ E2: $3x + 3y = 309$ Los alumnos deben determinar en el improbable caso de que cada libreta tuviera la misma cantidad de hojas. • ¿Cuántas hojas de raya tiene una libreta? • ¿Cuántas hojas de cuadro tiene una libreta? Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones obtenido se dirá que cuando existe una incógnita con el mismo coeficiente conviene usar el método de suma o resta. • ¿Qué incógnita tiene el mismo coeficiente? y • ¿Qué coeficiente tiene? 3 Una vez identificada la incógnita con el mismo coeficiente se comenzará a explicar el método de suma o resta.
Sesión 6	Suma-resta	Esta sesión se trabajará en binas para resolver un problema de sistemas de ecuaciones, donde a una bina se le asignará un papel bond para especificar los pasos del método de reducción. Después se planteará el siguiente problema. <i>Toño y Paty compraron en una tienda cuadernos y lápices. Todos los cuadernos y lápices que se compraron son iguales entre sí.</i> • <i>Por tres cuadernos y dos lápices, Paty pagó \$121.</i> • <i>Por cinco cuadernos y cuatro lápices, Toño pago \$220.</i> Aquí los alumnos tendrán que encontrar el sistema de ecuaciones, hallar una incógnita con el mismo coeficiente y resolverlo por el método de suma o resta. Después de haber recalado los pasos de este método se

		resolverán los siguientes sistemas. E1: $2x - 8y = -8$ E2: $3x - 8y = -10$ E1: $4m + 3n = -1$ E2: $6m - 6n = -5$
Sesión 7	Igualación	Método de igualación para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Esta sesión iniciará explicando qué es conveniente este método cuando una incógnita está despejada y se dará el siguiente sistema de ecuaciones. E1: $y = 4x + 13$ E2: $2x + 3 = y$ De forma de comunidad se cuestionará qué incógnita se encuentra despejada, intentando llegar a que las dos ecuaciones dan un valor de y. Por lo tanto, $4x + 13 = 2x + 3$ Dar hincapié de que este paso se llama igualar dos expresiones. Así se les pedirá resolver a x para encontrar el valor de y. Para comenzar a ver los pasos de este método se planteará el siguiente problema: <i>La mamá de Javier fue a la cremería. Por dos quesos de vaca y tres quesos de cabra pagó \$300. Si un queso de vaca vale \$30 menos que un queso de cabra, ¿Cuánto vale una pieza de cada tipo de queso?</i> <i>x es el precio de un queso de vaca.</i> <i>y el precio de un queso de cabra.</i> Los alumnos deberán encontrar las dos ecuaciones para poder resolver el sistema. E1: $2x + 3y = 300$ E2: $x = y - 30$ Se menciona que para poder realizar este sistema de

		ecuaciones por el método de igualación deben despejar una de las ecuaciones.
Sesión 8	Cierre	Lo que se ha aprendido sobre sistemas de ecuaciones. Plantea un sistema de ecuaciones para cada uno de los siguientes problemas y resuélvelo por el método que consideres apropiado. La suma de dos números es 72. Si el triple de uno de los números menos el otro número es 16, ¿Cuáles son esos números? 22 y 50 E1: $x + y = 72$ E2: $3x - y = 16$ El maestro Juan compró 12 balones, unos de fútbol y otros de básquetbol; los de fútbol valen \$150 y los de básquet \$200 ¿Cuántos balones compró para cada deporte si en total pagó 1650? E1: $x + y = 12$ E2: $150x + 120y = 1650$ Balones de básquetbol que compró: cinco balones Balones de fútbol que compró: siete balones

VI. Análisis de resultados.

En el siguiente espacio, se aborda el análisis dentro de cada una de las actividades diseñadas y los resultados que se obtuvieron acorde al enfoque teórico dentro del proceso de la modelación matemática y de la metodología ACODESA, agregando pruebas estadísticas con el propósito de complementar y evaluar la efectividad del trabajo. Dicho de otra forma, se da a conocer los hallazgos y logros que obtuvieron los estudiantes en esta secuencia, a través de un enfoque mixto de diseño anidado, llevando la parte cualitativa con las representaciones y modelos matemáticos que los estudiantes utilizaron al trabajar en las actividades, complementando con pruebas estadísticas aplicadas a los resultados de un diagnóstico y postest.

6.1. Análisis cualitativo.

En esta fase de la investigación se integra el análisis de resultados, apoyado en los datos que se recolectaron durante la aplicación de la secuencia previamente diseñada bajo la metodología ACODESA, describiendo lo acontecido entre cada actividad, como son las representaciones producidas por los estudiantes, las dificultades que presentaron y el papel de la modelación matemática en la traducción de los registros semióticos. En la Tabla 9 se categoriza como será la identificación de cada uno de los datos recolectados por medio de las audiograbaciones y entrevistas semiestructuradas.

Tabla 9.

Categorización de los datos cualitativos.

Categoría	Características	Evidencias
Representaciones registradas	De tipo algebraico, tabular, aritmético y	Procedimientos

	verbal.	producidos.
Modelación matemática	Comprensión de las actividades, matematización y validación de los procedimientos.	Diálogos y argumentos.
Dificultades identificadas	Errores de comprensión, traducción, interpretación y soluciones en las actividades.	Respuestas, observaciones y diálogos.

Además, se realizará una breve comparativa entre el trabajo y procedimientos entre el grupo experimental al que se le aplicó la secuencia y el de control donde se llevó a cabo una secuencia basada en los métodos de solución y problemas no contextualizados.

6.1.1. Comportamientos esperados antes de la aplicación y los encontrados.

La metodología ACODESA se divide entre fases donde los estudiantes van refinando sus representaciones propias, hasta que con ayuda del profesor en la fase de Institucionalización formalizan los conocimientos, de modo que primero utiliza el modelo matemático y luego lo conoce en su forma matemática, cada fase de la secuencia aplicada ha tenido un propósito como se explica en las Tablas 10, 11, 12, 13 y 14; y se replica lo encontrado al llevar a cabo cada fase.

Tabla 10.

Comportamientos en la fase individual.

Actividad	Comparativa
Actividad 1	Se esperaba que los estudiantes comenzarán a buscar una forma de encontrar cuántos viajes se realizó de cada transporte, es decir un par

	ordenado que solucionara la situación y que además buscarán una primera alternativa de solución, siendo 12 viajes en autobús y 11 en metro los datos buscados. Sin embargo una parte de los estudiantes comenzó a realizar procedimientos de prueba y error buscando un número que multiplicado por trece y luego otro por seis, sus resultados sumarán 222, ningún estudiante se fijó en que esos datos también deben sumar 23, por otra parte el resto de los estudiantes de la misma manera utilizó multiplicaciones pero, donde aunque identifican los datos relevantes de la situación no tienen un procedimiento claro de lo que se busca.
Actividad 2	Esta actividad aumenta un poco más el grado de dificultad para hallar la solución y se comienza por poner en contexto a los estudiantes sobre un negocio que es muy común actualmente entre los jóvenes donde el propósito es encontrar las soluciones de un sistema que implique la cantidad de cortes que se deben realizar para que se comience a percibir una ganancia y cuál será el gasto con respecto a esa cantidad. Nuevamente se sigue percibiendo una gran número de estudiantes que prefiere realizar multiplicaciones hasta encontrar el número de cortes donde se comienza a generar ganancia y otros que realizan multiplicaciones pero no encuentran una relación entre los datos para hallar la solución, otros alumnos presentan un representación tabular donde exponen la solución del problema y otros utilizan la tabla como una relación de proporcionalidad.
Actividad 3	Durante la etapa individual se esperaba que los estudiantes identificarán los datos relevantes de la situación, comenzarán a realizar operaciones y relacionarán esto con ideas propias; al momento de llevar a cabo esta actividad se identificaron dificultades en la comprensión de la idea de encontrar un punto de equilibrio, fuera de esta situación los estudiantes identificaron los precios y las cantidades vendidas (ver anexo B).

Tabla 11.

*Comportamientos en la fase de **equipo**.*

Actividad	Comparativa
Actividad 1	El propósito de esta etapa era compartir la forma en la que encontraron o intentaron hallar la solución de modo que se formarían representaciones más concretas y refinadas, además de que con el material lograran crear un símbolo que para ellos represente el boleto de un autobús y el de un metro. Algunos grupos continuaron realizando operaciones para encontrar la cantidad de viajes que se realizó de cada transporte, mientras que otros comenzaron a utilizar letras para identificar los valores que debían hallar, en cuanto a la representación en el material se obtuvieron diversas formas de identificarlos la mayoría con letras como A y B, M y A, otros con el costo de cada transporte y otros con una ilustración.
Actividad 2	El comportamiento esperado en esta fase es que los estudiantes ya tengan una noción de cómo se llevará a cabo la actividad con respecto a la anterior donde el propósito es compartir el procedimiento tomado individualmente y formalizar una nueva forma de resolver los problemas o bien la misma pero con un mayor argumento. Ante ello el grupo experimental tomó de acuerdo a las indicaciones los procedimientos que más les parecieron correctos y fáciles para interpretar la solución del problema, siendo una de ellas la forma tabular.
Actividad 3	Durante el trabajo colaborativo se esperaba que los estudiantes concretarán un procedimiento más refinado ante la fase pasada y comenzarán la búsqueda de una solución, de acuerdo con la dinámica de las otras dos actividades utilizaran un modelo matemático que facilite o represente lo que se busca.

	Ante los resultados de la fase anterior los estudiantes comunicaron las dificultades que tuvieron y los procedimientos que utilizaron para tratar de encontrar una solución, en este caso los grupos identificaron una relación directa e inversa entre las cantidades que se vendían y se surten con respecto al precio de venta y utilizaron la tabla de registro de ventas aumentando cantidades como \$150 y \$300 (ver anexo C).
--	--

Tabla 12.

*Comportamientos en la fase de **debate**.*

Actividad	Comparativa
Actividad 1	El primer punto de esta etapa en esta actividad fue introducir la idea de un debate en torno a una clase de matemáticas, después comenzar por poner en conocimiento los procedimientos que creyeron como una forma más fácil de representar la solución, para finalmente de acuerdo al procedimiento que más funcione y convenza al grupo tomarlo como la forma de solucionar la situación. La opinión de los estudiantes frente a un debate es que conocen el proceso ya que se implementa de forma frecuente en otras disciplinas pero casi nunca para defender el procedimiento de un problema en matemáticas. Por otro lado ante la situación planteada defendieron como una forma más fácil o entendible para ellos, el procedimiento de prueba y error.
Actividad 2	Al concluir, durante el debate que una tabla puede ser una forma más fácil de representar el problema, se realizó el llenado de una tabla de análisis en la cual muchos estudiantes comprendieron que en este problema no solo era multiplicar y encontrar un número mayor a el precio de los servicios, sino que se incluyen cuestiones como el material que se utiliza y el precio que cobra por cada servicio.
Actividad 3	Al contrario de las actividades anteriores, cuando se llegó a la fase del

	debate los estudiantes aún no contaban con una solución por ello se discutió sobre cuál de los procedimientos seguidos creían que era el correcto, a lo que respondieron que era utilizar la tabla y hallar un precio entre \$250 y \$300 que alinearía la misma cantidad de venta y de ingreso de las camisas (ver anexo D).
--	---

Tabla 13.

*Comportamientos en la fase de **autorreflexión**.*

Actividad	Comparativa
Actividad 1	El regreso a la misma situación en esta fase se pone en práctica lo compartido en las otras fases y se compara lo hecho en el procedimiento inicial y lo que se haría actualmente; sin embargo en este primer ciclo aunque la mayoría de los estudiantes tomó el procedimiento establecido en la fase del debate, unos pocos continuaron realizando otros procedimientos.
Actividad 2	La expectativa para esta actividad era que los alumnos utilizarán la representación trabajada y elegida durante el debate ante el regreso a la situación inicial, pero la mayoría decidió seguir el proceso de prueba y error para encontrar la solución (ver anexo E).

Tabla 14.

*Comportamientos en la fase de **institucionalización**.*

Fase	Comparativa
Institucionalización	El propósito de la institucionalización era aterrizar los registros encontrados durante las actividades en un sistemas de ecuaciones, explorar el software Geogebra y finalmente visualizar las soluciones que ellos ya habían encontrado en la intersección de

	las ecuaciones. La primera parte de la institucionalización se tomó para finalizar la tercera actividad, al no encontrar una solución durante las etapas, se decidió tomarle como ejemplo para la exploración con GeoGebra donde los estudiantes primeramente comenzaron por colocar los puntos que encontraron en la tabla de ventas: (200,50), (250,30), (200, 20), (250, 40) y los demás puntos que encontraron en sus procedimientos. Finalmente, en la segunda etapa se realizó el trazo de las líneas sobre los puntos que los estudiantes hallaron, de modo que al poder ver el punto de intersección, lograron deducir que el precio de equilibrio para la venta de las camisas es de \$237 y el número de camisas que se podrán vender son 35; a partir de este procedimiento realizaron las gráficas de las otras dos actividades donde visualizaron que sus respuestas eran correctas, además de que al ver las ecuaciones que GeoGebra les proporciona, fue fácil para ellos relacionar a quien representan las incógnitas.
--	--

6.1.2. Registro de modelos matemáticos y procedimientos.

Al aplicar la secuencia diseñada bajo el esquema de la metodología ACODESA, dentro de cada una de sus etapas (trabajo individual, por equipos, debate y autorreflexión) se identificaron distintas maneras en las que los estudiantes utilizaban modelos y símbolos matemáticos para encontrar una solución a cada situación que fue planteada a partir de un sistema de ecuaciones; en este apartado se expondrán por actividad las formas en las que los estudiantes buscaron soluciones a partir de sus propios modelos matemáticos.

Situación 1. De camino a la escuela.

Al plantear la primera actividad los estudiantes comienzan por buscar una solución directamente inmediata, por lo que comienzan por identificar los datos que para ellos son

relevantes; durante el **trabajo individual** se identifican procedimientos con operaciones aritméticas de ensayo y error, es importante que desde este momento la búsqueda se basa en la suma del producto de dos números con el precio de cada transporte, ya que aquí se identifica la primera relación con las incógnitas.

Figura 13.

Primer acercamiento a una situación que implica un sistema de ecuaciones.

The image shows handwritten mathematical work on grid paper. It includes several calculations and equations:

- Top left: A subtraction problem $13 - 6 = 7$ and a multiplication problem $23 \times 6 = 138$.
- Top center: A long division problem $222 \div 6 = 37$ with a remainder of 0.
- Top right: A subtraction problem $222 - 138 = 84$.
- Middle left: A subtraction problem $12 - 7 = 5$.
- Middle center: A multiplication problem $12 \times 3 = 36$.
- Middle right: A subtraction problem $23 - 12 = 11$.
- Bottom left: A subtraction problem $14 - 7 = 7$.
- Bottom center: A multiplication problem $11 \times 6 = 66$.
- Bottom right: A subtraction problem $156 - 66 = 90$.

Nota: Acervo personal.

Cómo se puede apreciar en la Figura 13, en el primer registro se realizaron operaciones entre los datos, como es el precio de los boletos, la cantidad de viajes y el gasto entre cada semana, realizando en la mayoría multiplicaciones, donde al realizar las preguntas de la entrevista semiestructurada los alumnos proporcionaron las siguientes respuestas, dónde defienden el porqué de su procedimiento o sus dudas.

Docente: - *¿Qué procedimiento seguiste para saber cuántos viajes hizo de cada transporte?*

- **Estudiante Di:** *“-Estoy multiplicando a ver cuántos números para dividirlos una parte en el trece y otra por seis y que sumen 222”*

- **Estudiante Es:** *“Que el autobús cobra trece pesos, el metro seis, hizo veintitrés viajes igual a doscientos veintidós pesos ¿Son puras divisiones?”*
- **Estudiante Em:** *“Yo multipliqué trece por cinco. Y cinco por seis, lo sumé y me dio noventa y cinco. Los sumé otra vez, le sumé otros tres, se le sumó más tres, y lo sume y me salió 222. Y llegué a la conclusión de que son doce en autobús y once metros”*
- **Estudiante He:** *“Yo estoy prestando veintitrés y entre cinco, porque son cinco días a la semana”*

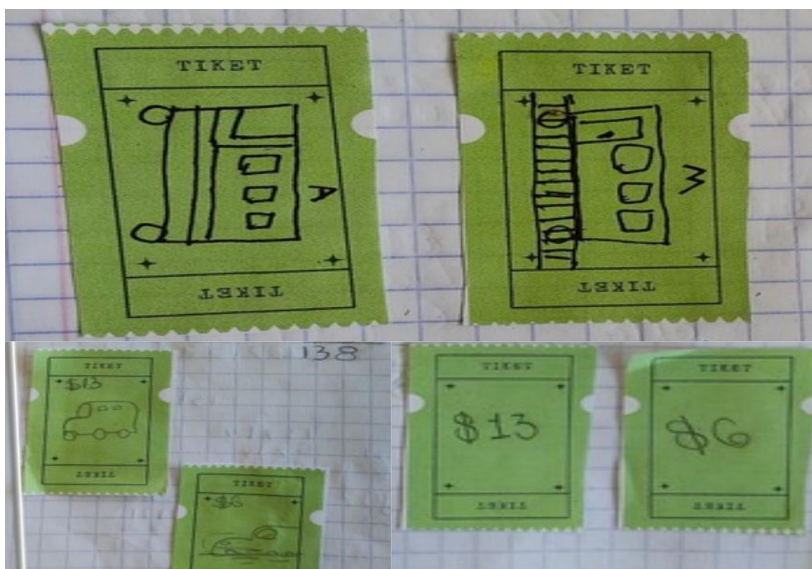
Comunicación personal (23 de febrero 2026)

Existen similitudes y diferencias visibles entre lo que cada estudiante realiza, sin embargo, se generalizan cuatro posturas entre el desarrollo de las actividades; el primero donde al utilizar el método de prueba y error han encontrado fácilmente una solución, el segundo de los estudiantes que identifican cada uno de los datos pero aún no determinan un modelo o proceso de solución y finalmente los que intentan ver una alternativa desde lo cotidiano, es decir utilizando un solo transporte, observando en qué gastaría menos o por los días que acuden a la escuela.

Con estos resultados se indica a los estudiantes ubicarse **en equipos** de tres a cuatro integrantes donde expusieron sus respuestas con sus compañeros y diferenciaron con un símbolo cada boleto como se muestra en la Figura 14, aquí se comienza a apreciar cómo los estudiantes comienzan a asignar letras y símbolos que para ellos tienen sentido de representar, en este caso un boleto.

Figura 14.

Símbolos utilizados para diferenciar los tickets.



Nota: Acervo personal.

Precisamente durante esta parte los estudiantes ponen en discusión sus procedimientos y la mayoría ha llegado a una respuesta, además de que muestran una opinión más sólida de por qué el procedimiento que llevaron a cabo es el correcto, además de que en algunos equipos donde no existía aún una solución se buscaron alternativas para encontrar una respuesta o bien se adoptó el proceso de algún compañero. Como se muestra a continuación, al cuestionar las razones de uno de los equipos.

Docente: - *¿Cuáles son los pasos que han seguido para encontrar la respuesta? ¿Por qué decidieron que este procedimiento es el correcto?*

- **Estudiante Cr:** *“Pues miré, en sí, ya chequé con el doce, se multiplica por el trece, igual a ciento cincuenta y seis. Después el once se multiplica por el seis, da doscientos setenta y seis. Si lo sumamos, da igual a doscientos veintidós, que fue lo que gastó.”*
- **Estudiante Ar:** *“Pues estuve dividiendo el 23 entre el 13 pero no me salió el resultado, también 13 entre 222 pero no, por eso escogimos el de ella”*

- **Estudiante Ca:** *“Es que según yo tenemos que sacar muchas multiplicaciones hasta que nos dé la respuesta”*

Docente: - *¿cómo decidieron que eran once y doce?*

- **Estudiante Ka:** *“Porque son veintitrés viajes. Tienen que sumar veintitrés esos dos, ya nada más necesitamos saber si son doce en el que cobra \$13 y doce en el de \$6 o viceversa”*

Comunicación personal (24 de febrero 2026)

Así, durante la fase de **debate** eligieron este procedimiento como la forma más fácil de representar esta situación, realizando operaciones aritméticas, no obstante al realizar las preguntas de la entrevista se apreció que los estudiantes realizaban las operaciones con base en ideas como: se busca un par de números que sumados resulten veintitrés, que dos números multiplicados uno por trece y otro por seis, sus productos suman doscientos veintidós, que un estudiante normalmente acude cinco días a la escuela por lo tanto como mínimo debe usar diez veces cada transporte.

Por ello, al llegar a la fase de **reflexión** los estudiantes niegan que exista otra forma de representar este problema y defienden que utilizar este procedimiento les dio mejores resultados que otros que intentaron, como la regla de tres o procedimientos parecidos a la proporcionalidad directa e inversa.

Docente: - *¿Por qué utiliza esa forma? ¿Ha servido la forma que decidieron durante el debate?*

- **Estudiante Ca:** *“No, así no pude, mejor es multiplicando y dividiendo”*
- **Estudiante Juo:** *“Sí, es la multiplicación. Multiplicar y dividir hasta que se dé el resultado. Porque la vez pasada lo use y me funcionó”*

- **Estudiante Se:** *“porque viendo todos los procedimientos que hice o que encontré, este fue el que más me dio resultados de todos.”*

Comunicación personal (25 de febrero 2026)

Situación 2. Mi nuevo negocio.

La segunda situación tuvo un impacto distinto al primer acercamiento, al conocer la dinámica de trabajo el desarrollo del trabajo fue más fluido, con respecto al nivel que se aumenta permitió que los estudiantes aplicarán otros registros distintos a sólo realizar operaciones; además de que al ser una situación donde la respuesta depende de la subsistencia de un negocio, los estudiantes se situaron en las posturas donde para ellos se “gana más”.

Durante la fase **individual** a diferencia del ciclo anterior, hubo una mayor variedad de procedimientos dividiéndose en tres características, la primera de los que identificaron los datos importantes y comenzaron a realizar una tabulación, la otra donde se realizaron multiplicaciones y restas hasta encontrar una ganancia y la tercera de los que buscaban un número mayor a los servicios, pero no consideraban el costo fijo y la constante de gasto. En seguida, se muestran algunos de estos hallazgos:

Docente: - *¿Qué procedimiento hizo?*

- **Estudiante Jun:** *-hice multiplicación*

Docente: - *¿Qué multiplicó?*

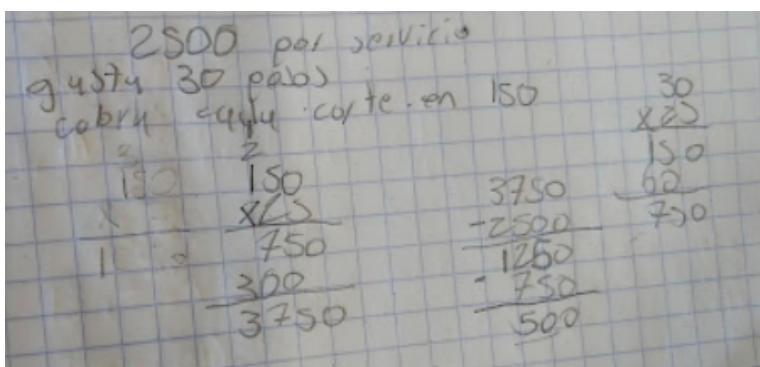
- **Estudiante Jun:** - *“ciento cincuenta que cobra por corte, por veinte cortes que haga pa’ que le gane, va a ganar 3000. Y luego los dos mil quinientos que va a pagar le sobran 500 varos”*

- **Estudiante Sa:** - *“multiplicar los siete días por cada corte. Suponiendo que haga un corte al día, Restarle lo de cada corte. Y restarle lo que paga en la renta”*
- **Estudiante Cr:** - *“Yo hice uno por 40 y me dio 6000, menos los 3500, quedan 4500. Y menos los 1200 de lo que gastan cada corte le quedan, le quedan 3300, ya está ganando”*

Comunicación personal (26 de febrero 2026)

Figura 15.

Procedimiento clásico.



Nota: Acervo personal.

Este procedimiento de prueba y error le llamaremos la forma clásica, como se muestra en las respuestas anteriores, los alumnos se fijan en encontrar el número de cortes a realizar para cubrir los gastos y a su vez está cantidad donde se alcanza el balance entre el ingreso y el gasto, por otra parte, se tienen las respuestas dónde el interés del estudiante es obtener una cantidad de ganancia, un número que para ellos hace sentir que existe un buen negocio.

- **Estudiante Cr:** - *“ Yo descubrí que de perdido tiene que hacer veinticinco cortes a la semana para ganar quinientos varos, multipliqué ciento cincuenta por veinticinco. Me da tres mil setecientos cincuenta. De eso, lo resto lo que le cobran por la renta y me da mil doscientos cincuenta, que es lo que me sobra. Pero cómo*

gasta treinta pesos en cada corte, el treinta lo multiplica por veinticinco, porque son los cortes que hizo que da igual a setecientos cincuenta, lo resto, entre esto y me da quinientos”

- **Estudiante Jun:** - *“Si hacía 30 cortes ganaba 600, entonces le estoy poniendo más cortes para que gane más”*
- **Estudiante Sa:** - *“ Intenté con uno al día, pero no hay, ósea no le alcanza para pagar lo de los 2500 entonces tendría que hacer más cortes a la semana. Entonces tendría que buscar un número que para multiplicarlo me dé más de eso”*

Comunicación personal (26 de febrero 2026)

La Figura 16 muestra cómo los primeros procedimientos para resolver este sistema de ecuaciones lo relacionan con una línea de proporcionalidad, donde al aumentar el número de cortes directamente aumenta el gasto y el ingreso.

Figura 16.

Representación tabular 1.

1	300
2	600
3	900
4	1200
5	1500
6	1800
7	2100

2500
30 x 1 corte gasto
150 x 1 corte cobra

Nota: Acervo personal.

Al reunirse en **equipos** los registros de representación se redujeron a dos formas; la forma tabular y la forma aritmética, pues mientras algunos equipos rodeaba el punto donde se comienza a generar una ganancia otros ya lo relacionaban en una tabla visualizando cómo aumentan ambas cantidades hasta que una de ellas es mayor, además, han asignado

dos literales como se muestra en la Figura 17 una C que para ellos representa el número de cortes de cabello realizados y una P que para ellos representa el ingreso en pesos según el valor de C .

Figura 17.

Representación en forma tabular de un sistema de ecuaciones.

P	C
150	1
300	2
450	3
600	4
750	5
900	6
1050	7
1200	8
1350	9
1500	10
1650	11
1800	12
1950	13
2100	14
2250	15
2400	16
2550	17
2700	18
2850	19
3000	20
3150	21

30
+ 121

151

3150
- 1630

1520

21 cortes tiene que hacer cada semana

Nota: Acervo personal.

La importancia de contraponer las ideas de los estudiantes en la fase equipos se hace visible en el siguiente ejemplo, donde los estudiantes van refinando sus propuestas de solución, hasta que llegan a un modelo matemático que les sirve para visualizar a partir de qué punto el negocio subsiste y ya no solo realizar operaciones sin una herramienta clara que permita encontrar una solución.

Docente: - *¿Qué habían realizado al principio?*

- **Equipo AlKa:** - *“Una regla de tres”*

Docente: - *¿Y qué sucedió?*

- **Equipo AlKa:** - *“Multiplicamos veinte por ciento cincuenta y me salieron tres mil, menos seiscientos, que son de los treinta pesos que cobran de cada corte, dos mil cuatrocientos. Y después dijimos, no pues pierde. Y cómo todavía no alcanza ni para pagar la renta”*

Docente: - *Entonces ¿cómo encontraron este resultado?*

- **Equipo AlKa:** - *“Ella hizo una tabla, una pequeña tablita”*

Docente: - *¿A partir de qué cantidad existe una ganancia?*

- **Equipo AlKa:** - *“En el veintiuno, ya ganaba veinte pesos”*

Comunicación personal (26 de febrero 2026)

Sin embargo, durante el **debate** el procedimiento al que se llegó generalmente fue a multiplicar 150 por cualquier número; a esa cantidad restarle la multiplicación de 30 por el mismo número más los 2500 por el servicio; tomando en cuenta que cuando el resultado de la multiplicación de 150 es mayor a la otra se gana el dinero, es decir, cuando lo que cobra es mayor a lo que gasta.

Aunque algunos estudiantes insistieron en el uso de tablas como una manera más fácil de representar la situación, los demás tuvieron una mayor capacidad de convencimiento por lo que para la siguiente etapa se registraron dos formas de buscar la solución. Por otra parte, como se menciona en el plan de acción se implementó una tabla de análisis donde para los que ya habían trabajado en este registro experimentaron una mayor confianza en sus propios procedimientos.

Figura 18.

Tabla de análisis con negativos.

NÚMERO DE CORTES REALIZADOS	¿CUÁNTO DINERO COBRA?	¿CUÁNTO DINERO GASTA?	GANANCIA
15	2250	2950	-700
16	2400	2980	-580
17	2550	3010	-460
18	2700	3040	-340
19	2850	3070	-220
20	3000	3100	-100
21	3150	3130	20
22	3300	3160	140
23	3450	3190	260
24	3600	3216	380
25	3750	3250	500

Nota: Acervo personal.

Como se muestra en la Figura 18 y 19 algunos resultados en la columna de la ganancia algunos estudiantes hacen uso de números negativos, señalando que cantidad falta por cubrir en cuanto al gasto, mientras que otros estudiantes sólo notan a partir de qué cantidad se ha comenzado a percibir un ingreso libre, mientras falte por cubrir al gasto la ganancia es cero.

Figura 19.

Tabla de análisis con ganancias.

NÚMERO DE CORTES REALIZADOS	¿CUÁNTO DINERO COBRA?	¿CUÁNTO DINERO GASTA?	GANANCIA
15	2250	2950	-700
16	2400	2980	-580
17	2550	3010	-460
18	2700	3040	-340
19	2850	3070	-220
20	3000	3100	-100
21	3150	3130	20
22	3300	3160	140
23	3450	3190	260
24	3600	3216	380
25	3750	3250	500

Nota: Acervo personal.

Una de las ventajas que defienden los estudiantes sobre la tabulación, es que se necesita las primeras cantidades para poder descubrir la constante, ya que, al llenar la tabla, en las columnas de cobro y gasto una aumenta 150 con respecto a cada corte y la otra 30 más el costo de los servicios y no se necesita multiplicar por cada número. Finalmente, al

regresar al **trabajo individual** las entrevistas se fijaron en el procedimiento que decidieron utilizar y lo que significa para ellos el percibir ganancias en un negocio.

Docente: - *¿Qué quiere decir que empezamos a tener ganancias?*

- **Estudiante Cr:** - *“Que empieces a ganar dinero, a generar a generar, ¿qué te quedas tú dinero no? y no lo des”*

Docente: - *Si pago la renta y pago el material y me queda un peso, ¿será una ganancia?*

- **Estudiante Juo:** - *“Sí ya es ganancia si te queda un peso ya es”*
- **Estudiante Pa:** - *“No”*
- **Estudiante Cr:** - *“¿Por qué no?”*
- **Estudiante Pa:** - *“Porque no estas ganando lo que le estás invirtiendo”*
- **Estudiante Cr:** - *“Se está ganando un pesito”*
- **Estudiante Pa:** - *“¿por qué?”*
- **Estudiante Cr:** - *“Porque ya pagué todo y me quedó libre un pesito.”*
- **Estudiante Pa:** - *“Con un peso no ajustó nada. Tiene que generar al menos lo que invertimos para poder ganar”*

Comunicación personal (03 de marzo 2026)

Una de las características de realizar esta secuencia bajo la modelación matemática es que los estudiantes conecten sus resultados matemáticos con la realidad del contexto que se plantea en este caso se discute sobre el significado de ganar en un negocio, por otra parte, aunque se registraron representaciones tabulares durante esta actividad, los estudiantes siguen percibiendo a las operaciones aritméticas como la mejor vía de solución.

Docente: - *¿Habrà una forma más fácil de representar cuando empieza a tener ganancias además de una tabla u operaciones?*

- **Estudiante Es:** - “yo diría que no hay otra forma más fácil”
- **Estudiante Ca:** - “es que para mí la forma más fácil es con la multiplicación”

Docente: - ¿Habrá una forma más fácil de hacer esto?

- **Estudiante Jun:** - “si”

Docente: - ¿Cómo lo podría hacer?

- **Estudiante Jun:** - “Es multiplicando y restando. Haciendo el de 30 da 900, quitándole los 30 varitos”

Docente: - ¿y eso es suficiente?

- **Estudiante Jun:** - “si, 900 varotes ya con eso va ahorrando para la algo”

Comunicación personal (03 de marzo 2026)

Se puede apreciar en este caso que los estudiantes se situaron verdaderamente en el contexto de la situación, aunque tenían en cuenta que el gasto se cubría en 21 cortes su prioridad era un negocio rentable, llegando a la conclusión de que cuando una situación tiene una repercusión o sentido de hacerlo bien, se obtienen aprendizajes más significativos y se utilizan modelos matemáticos adecuados a las necesidades de quien los utiliza.

Situación 3. Venta de ropa.

En el caso de la *Situación 3. Venta de ropa* se realizó la fase individual y la fase por equipos en trabajos a lápiz y papel, para visualizar la solución en este caso con los procedimientos seguidos durante estas fases, se tomó como piloto para la exploración el software GeoGebra, actividad que se extiende con la fase de institucionalización los cuales son presentados en el apartado *Aplicación de GeoGebra como vía de aterrizaje*.

Durante las dos primeras fases los estudiantes comenzaron primero por tratar de comprender qué era lo que realmente buscaba el problema, al no tener acercamientos

previos que tengan relación con lo que es un punto de equilibrio entre la oferta y demanda de un producto; al tener un nivel más complejo, las decisiones de los estudiantes se dividieron en dos formas.

La primera de los que prefieren resolver el problema desde un estilo de pensamiento visual y holístico, es decir proporcionando alternativas desde las situaciones que ellos conocen o situándose en el contexto de la demanda de un producto y la segunda donde los estudiantes eligieron resolver la situación desde un pensamiento analítico utilizando tablas u operaciones entre los datos para encontrar una respuesta. Como se muestra en el diálogo con los estudiantes y las opiniones que ellos expresan.

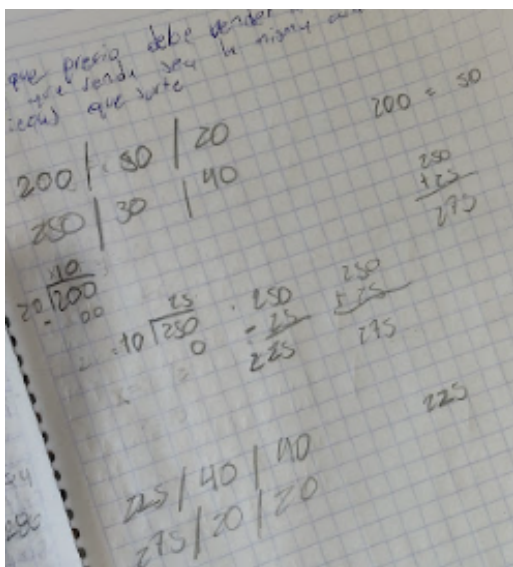
Docente: - *¿Qué procedimiento han seguido? ¿Qué creen que debe hacer el vendedor para que no le sobren ni le falten playeras?*

- **Estudiante Al:** - *“yo digo que Surta lo de la venta de doscientos cincuenta. y que lo venda, lo venda a doscientos cincuenta”*
- **Estudiante Juo:** - *“que las que le van sobrando, las vaya acumulando y después las saque a otro precio”*

Comunicación personal (05 de marzo 2026)

Figura 20.

Tabla de relaciones en ventas.



Nota: Acervo personal.

Después de revisar la situación y analizar la tabla de registros de ventas, los estudiantes notaron que existe una relación entre las cantidades de lo que se surte, la demanda de los clientes y el precio al que se vende el producto, extendiendo la tabla en otras cantidades como se muestra en la Figura 20, bajo la idea de que cuando el precio se encuentra en \$200, se venden alrededor de cincuenta piezas y las ganancias alcanzan para comprar veinte piezas, al aumentar \$50 las ventas bajan 20 piezas y el presupuesto alcanza para 20 piezas más.

- **Estudiante Es:** - *“Las ventas bajaron al aumentar el precio. Pero ahora, cuando las vendía así, podría surtir cuarenta. Sí aquí están doscientos, si aquí en doscientos cincuenta, si le aumentamos otros cincuenta pesos, es trescientos. Y entonces, si le aumentamos otros cincuenta, le vamos a quitar otras veinte. Y ahora son diez piezas, y podría surtir sesenta”*
- **Estudiante Pa:** - *“Profe, por ejemplo, de aquí del 50 al 30 baja, entonces para por ejemplo ponemos 150, entonces serían 70 en ventas, pero entonces no podría surtir ninguna”*

Con base en estos resultados, conociendo la relación que forma la línea que sigue la ecuación que pertenece a las ventas y la ecuación que alcanza el presupuesto dependiendo de la cantidad de las ventas, es que se comienza con la actividad de aterrizaje, de modo que al representar gráficamente estos puntos de la tabla sea más fácil visualizar el punto de equilibrio e identificar estas ecuaciones en su forma algebraica.

6.1.2.1. Comparación de registros ante el grupo de control.

La secuencia que se llevó en el grupo de control, fue planeada bajo la solución de sistemas de ecuaciones con el método de sustitución, suma-resta e igualación; en resumen la secuencia de cada método inicia con la presentación de un problema no contextualizado que implica un sistema de ecuaciones, donde el primer paso es traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico, construyendo las dos ecuaciones del sistema y a partir de esta representación aplicar uno de los métodos de solución establecidos.

Figura 21.

Representación algebraica del grupo de control.

Se realizó una colecta de libretas usadas para crear nuevas y darles una segunda vida. Una alumna adquirió 5 libretas de rayas y 3 cuadernillos, saliendo 425 hojas en total. Si hubiera sido 3 de rayas y 3 cuadernillos, habrían sido 309 hojas. ¿Cuántas de rayas tiene y cuántas de cuaderno?

$$\begin{aligned}5r + 3c &= 425 \\3r + 3c &= 309 \\(5r + 3c) - (3r + 3c) &= 425 - 309 \\2r &= 116 \\r &= 58 \\3(58) + 3c &= 309 \\174 + 3c &= 309 \\3c &= 135 \\c &= 45\end{aligned}$$

Nota: Acervo personal.

En la Figura 21 y 22 se aprecian dos problemas planteados donde se da la libertad a los estudiantes de representar las ecuaciones con símbolos que para ellos representen las dos incógnitas que se buscan, de acuerdo con la teoría de registros de representación semiótica, es aquí donde es visible el aprendizaje porque existe la traducción de una información dada en lenguaje común a otro tipo de representación, en este caso algebraicamente.

Figura 22.

Formulación de un sistema de ecuaciones.

The image shows a handwritten mathematical problem and its solution on a grid background. The text is written in Spanish. The problem states: 'La edad de Luis y Juan serán 55 y la edad de Juan más 2 es igual a 2 veces la edad de Luis'. Below this, the equations are written: $L + J = 55$ and $J + 2 = 2L$. The solution shows the substitution of $J = 55 - L$ into the second equation, resulting in $L = 55 - 36$.

Sustitución

La edad de Luis y Juan serán 55 y la edad de Juan más 2 es igual a 2 veces la edad de Luis

① $L + J = 55$

② $J + 2 = 2L$

① $L + J = 55$
 $J = 55 - L$

$L = 55 - J$
 $L = 55 - 36$

Nota: Acervo personal.

Las diferencias entre los registros obtenidos entre ambos grupos son muy notorias, y se vuelve efectivo el uso de modelación matemática como una estrategia de enseñanza, en el grupo experimental los estudiantes al no tener una serie de pasos establecida para resolver las situaciones se utilizaron operaciones, literales, tablas e ideas en lenguaje común según el contexto y de acuerdo a la necesidad de utilizarlo.

6.1.3. Aplicación de GeoGebra como vía de aterrizaje.

Institucionalización.

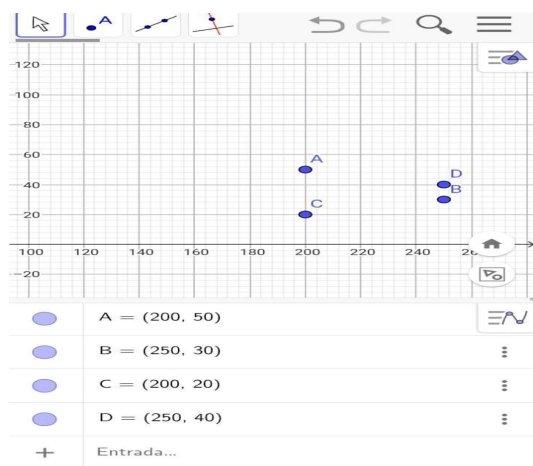
Para poder llegar a la representación de los resultados que los estudiantes habían encontrado se realizó una exploración del software GeoGebra dentro de los equipos con los

que cuenta la institución organizados en cada uno tres integrantes, indagando en la aplicación e investigando en internet, la forma que ellos encontraron de llevar las tablas y las operaciones a GeoGebra fue a partir de puntos como se muestra en la Figura 23, donde a través de preguntas sobre la relación de los puntos A y B respectivamente con C y D donde se trazaron las rectas.

Cabe señalar que los estudiantes no encontraron una forma directa de representar la información que ellos tenían en las tablas, aunque exploraron diversas herramientas no tenían una comprensión de lo que significan, al teclear en el buscador esta pregunta; el primer equipo comenzó por utilizar el trazo de puntos así siguiendo los demás compañeros.

Figura 23.

Trazo de puntos en GeoGebra.



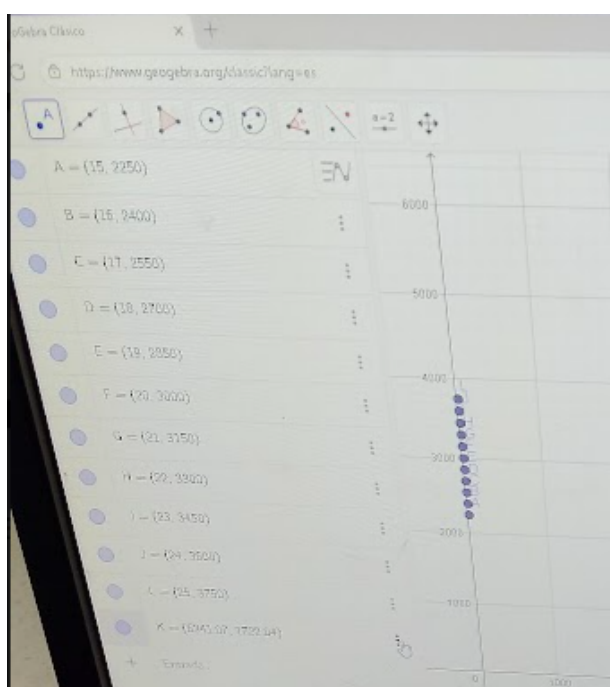
Nota: Acervo personal.

Una vez trazadas las rectas fue para ellos identificar el punto de intersección, además de que lograron descubrir que, al formar estas representaciones, GeoGebra presenta dos expresiones una para la recta que pasa por A y B y la otra que pasa por C y D. Para continuar con estas ideas se retomó la segunda actividad, en la cual hubo un mayor registro de representaciones distintas entre los procedimientos de los estudiantes.

El propósito de esta fase era llegar a la formalización lo que es un sistema de ecuaciones, las expresiones que se forman y la solución en x y y , es decir el punto de intersección; el modo en el que los alumnos continuaron trazando sus rectas fue mediante puntos ya que los procedimientos más recurridos fueron tablas y operaciones de prueba y error como se muestra en la Figura 24.

Figura 24.

Trazo de puntos “ganancia por cada corte”.



Nota: Acervo personal.

Al trazar la recta de los puntos anteriores; sobre lo que gana y lo que gasta. GeoGebra proporciona las siguientes ecuaciones: $y = 150x$, $150x - y = 0$ y $30x - y = -2500$, $y = 30x + 2500$, por lo que se realiza nuevamente una consulta hacia los estudiantes sobre el significado de estas expresiones o que creen que representan obteniendo las siguientes opiniones.

Docente: - *¿Qué significa esta ecuación? ¿A qué creen que se refiere?*

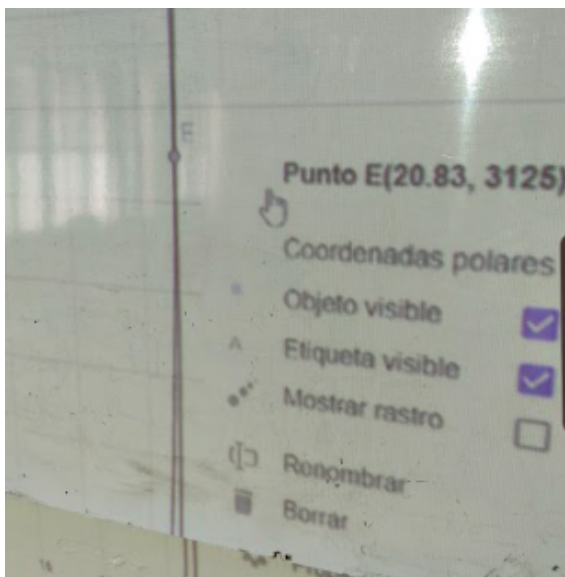
- **Equipo Ka:** - *“Que lo que cobre es igual a multiplicar ciento cincuenta, por el número de cortes que haga”*
- **Equipo Ar:** - *“Lo que vaya a cobrar es igual a ciento cincuenta por el número de cortes que esté haciendo; Por ejemplo, si son veintiún cortes los que está haciendo, ciento cincuenta por veintiún”*

Comunicación personal (06 de marzo 2026)

Como se puede apreciar, los alumnos entienden esta ecuación de una forma más natural, ya que precisamente el modelo de sus tablas y procedimientos se basa en esta idea; multiplicar varios números por ciento cincuenta pesos y ese mismo número multiplicarlo por treinta restando el pago del servicio, en otras palabras, las ecuaciones ya tienen un sentido de ser y de utilizarlas. Sin embargo, en este caso también se notó que el punto de intersección no se encontraba en un número entero (Ver la Figura 25), interpretándose como se muestra en el siguiente diálogo.

Figura 25.

Punto de intersección.



Nota: Acervo personal.

Docente: - *¿Cuántos cortes tenía que hacer?*

- **Grupo experimental:** - *“Veintiuno”*

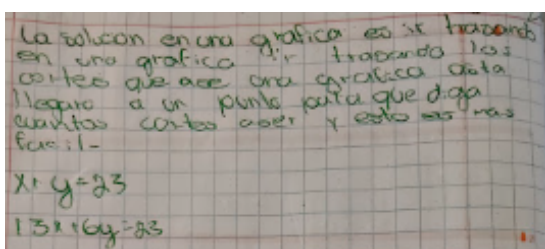
Docente: - *¿Dónde se encuentra el punto de intersección?*

- **Grupo experimental:** - *“Se interseca en veinte, punto ochenta y tres”*
- **Algunos alumnos:** - *“pero, o sea, hace veintiún cortes, porque no vamos a hacer veinte, punto ochenta y tres cortes”*

Comunicación personal (06 de marzo 2026)

Figura 26.

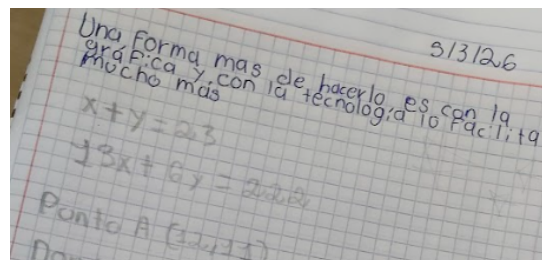
Formalización de un sistema de ecuaciones.



Nota: Acervo personal.

Figura 27.

Opinión de un estudiante ante el uso de GeoGebra.



Nota: Acervo personal.

Finalmente, la Figura 26 y 27 muestran el regreso a la pregunta que se realiza durante algunas fases de la metodología para impulsar a los estudiantes al refinamiento de los modelos matemáticos que ellos utilizaron, ¿existirá una forma más fácil de representar la situación planteada?; aunque mencionan a la tecnología o la gráfica como la forma más fácil, han llegado a las dos ecuaciones lineales que implica cada una de las situaciones.

6.1.4. Dificultades identificadas al resolver situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales.

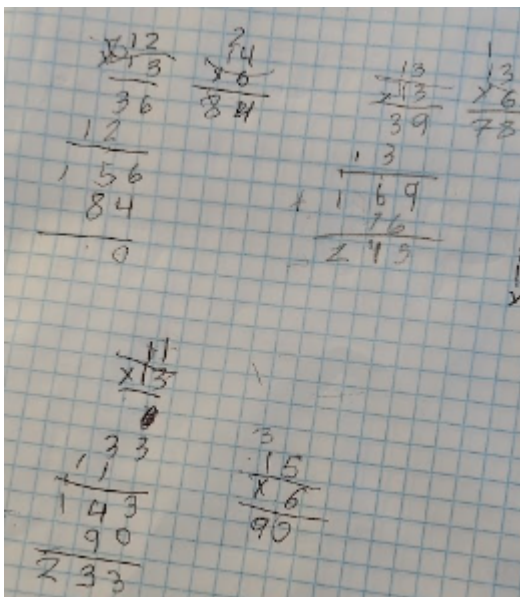
Uno de los objetivos específicos planteados al inicio de este trabajo, fue el de identificar las dificultades que presentan los estudiantes del grupo de control, al emplear situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales por medio de la modelación matemática, esto con la finalidad de identificar puntos de mejora que sean necesarios considerar en futuras pruebas; además de considerarse la valorización de la efectividad de la secuencia.

A través de las fuentes de recolección de datos, como son las audiograbaciones y las entrevistas semiestructuradas sucedió un monitoreo constante, entre el proceso que estaba siguiendo cada estudiante según la fase que aconteciera al momento de cuestionar a los alumnos. Gracias a ello, se logró identificar las representaciones y modelos matemáticos que se utilizaron y el progreso entre cada fase; sin embargo, también se encontraron dificultades que por momentos no permitían el diseño de un modelo o bien la refinación del mismo.

Durante las etapas de la trabajo **individual** las dificultades que se presentaron fue la decisión de qué algoritmo seguir para poder encontrar una solución, al no tener una referencia clara de pasos a seguir, entra en discusión lo que se debe hacer y qué se quiere encontrar con el procedimiento, al realizar operaciones de prueba y error las operaciones dan resultado teniendo claro esta idea; sin embargo se registraron representaciones donde los estudiantes identificaban datos relevantes de la situación y encontrándose con una barrera de que operar con ellos como se muestra en la Figura 28.

Figura 28.

Dificultades de interpretación.



Nota: Acervo personal.

Como se muestra en los primeros instantes, algunos estudiantes seguían el procedimiento de multiplicar e identificaban datos relevantes; hablando de la primera situación se conocía el precio de cada boleto, el número de viajes y el gasto total de cada semana, pero ejecutaban operaciones entre estos mismos datos que ya se conocen sin buscar la incógnita del problema, aunque en el mayor número de casos estas dificultades se disipan al momento contraponer las ideas en las fases consecutivas.

Por otro lado, durante las fases del refinamiento de las representaciones iniciales; siendo estas el trabajo **por equipos** y el **debate**, emerge una dificultad donde se pusieron en juego la capacidad de interpretación y la capacidad de convencimiento de cada equipo como se describe en apartados anteriores algunos estudiantes comenzaron a utilizar tablas, tablas de proporcionalidad y algunas literales que modelan la información de las situaciones.

Al momento de poner en plenaria estos procedimientos, los estudiantes difícilmente lograron comprender por qué sus compañeros utilizaron letras y tablas para encontrar las

soluciones; de acuerdo con los referentes sobre modelación matemática, una explicación a esta situación es la afirmación de que un modelo tiene sentido de ser y de utilizarlo para quien modela.

Para el resto de los estudiantes la forma más fácil de representar la información era a través de operaciones aritméticas y para ellos tiene un sentido seguir tal procedimiento. Por ello es menester, volver a presentar el diálogo donde uno de los estudiantes argumenta durante la solución a una situación que para él no existe otra representación que le ayude a hallar las soluciones del sistema.

Docente: - *¿Habrá una forma más fácil de representar cuando empieza a tener ganancias además de una tabla u operaciones?*

- **Estudiante Es:** - *“yo diría que no hay otra forma más fácil”*
- **Estudiante Ca:** - *“es que para mí la forma más fácil es con la multiplicación”*

Comunicación personal (03 de marzo 2026)

En resumen, las dificultades que presentan los estudiantes al tratar una situación donde su solución es a través de un sistema de ecuaciones lineales son primero de la creación de representaciones matemáticas que faciliten la búsqueda de soluciones además de el método de prueba y error y la falta de comprensión durante el refinamiento de las representaciones hacia las propuestas de otros compañeros.

6.1.5. Representaciones alcanzadas durante el Postest.

Durante la prueba para el análisis preliminar se realizó un análisis más extenso sobre el primer indicador, que trata de la interpretación que los estudiantes dan a una situación planteada en otra representación matemática, donde se encontraron algunos

resultados útiles para comenzar a aplicar la secuencia, a continuación, se encuentran los resultados encontrados para este indicador durante la evaluación final.

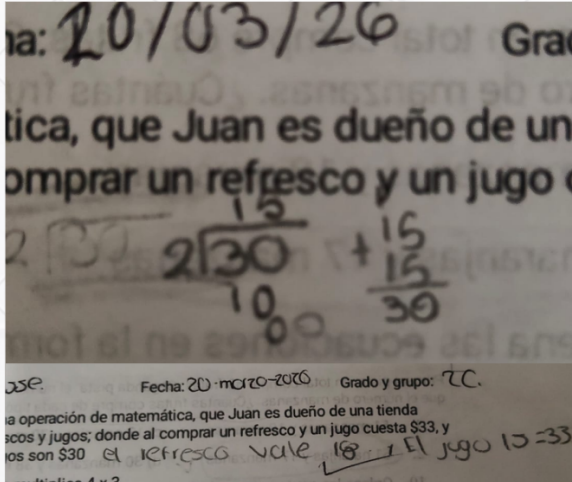
En el caso del grupo experimental demostraron lograr la interpretación de un problema sin contextualizar en diversas representaciones, entre ellas se repite un mayor número de veces la forma algebraica donde los alumnos asignan un símbolo o literal que para ellos significa los datos relevantes presentados y que los llevan fácilmente a una solución, que es el precio de los productos. Aquí se muestran algunas de estas interpretaciones a las que los estudiantes llegaron durante el postest.

- **Estudiante A:** " $r + j = 33 — 2j = 30$ "
- **Estudiante B:** " $x + v = 33 — v + v = 30$ "
- **Estudiante C:** " $R = 18 — J = 15 — R = Refrescos — J = Jugos$ "

Como se puede observar, después de la aplicación de la secuencia los alumnos se sienten con una mayor libertad de expresar sus ideas en el reconocimiento de que ningún procedimiento es correcto o incorrecto mientras tenga un sentido utilizarlo; otros estudiantes prefirieron realizar otro tipo de representaciones como es la interpretación en el lenguaje común, con operaciones aritméticas e incluso una forma tabular como se puede apreciar en la Figura 29 y 30.

Figura 29.

Estudiante D. Representación de situaciones en forma aritmética y lenguaje común.



Nota: Acervo personal.

Figura 30.

Estudiante E. Representación de situaciones en forma tabular.

Refresco	Jugo	\$
1		33
2		30

1 jugo = 15
1 refresco = 18

Nota: Acervo personal.

En comparación con el grupo de control, no se puede negar que no exista una capacidad de representar en otras formas una situación, sin embargo, los resultados obtenidos en el postest en este mismo indicador, sólo han sido en la forma algebraica como se muestra a continuación; una razón de que esto suceda puede deberse a que al resolver un problema y aplicar un método de solución, el primer paso es pasar del lenguaje común al algebraico para obtener las dos ecuaciones del sistema.

- **Estudiante A:** " $33 - (30 / 2) = 18$ — $18 + 15 = 33$ "
- **Estudiante B:** " $r + j = 33$ — $2j = 30$ "

Tomando en cuenta todas estas representaciones es visible que no todos los estudiantes estaban mecanizados a realizar el mismo procedimiento, lo que ha promovido que cada uno asigne un medio distinto para encontrar una solución, un medio que para ellos es el más fácil y que les ha servido, como es el diferenciar los datos con letras, realizar

directamente una operación o bien organizar los datos para tener una forma en la que sea factible visualizar un resultado.

6.2. Elección de pruebas estadísticas.

Al tener los resultados de los exámenes aplicados, se llevó a cabo un proceso de selección para la aplicación de la prueba estadística más conveniente, es decir si el trabajo es mejor representado mediante una prueba paramétrica o no paramétrica, recurriendo a una prueba de normalidad mediante el software llamado Jamovi; el cual es una herramienta favorable para realizar análisis estadísticos y generar gráficos que ayudan en la interpretación de los datos.

En este caso se utilizó la prueba de normalidad Shapiro-Wilk donde se determinó que el análisis estadístico sería guiado por una prueba paramétrica, aplicando esta medida tanto para los datos correspondientes al grupo experimental como a los datos del grupo de control. La prueba Shapiro-Wilk es un estadístico de prueba que mide qué tan cerca se encuentra un conjunto de datos de la distribución normal donde, si $W \approx 1$, los datos son relativamente normales, de lo contrario si **W está lejos de 1**, son poco normales.

Además, se otorga un valor **p (p-value)** el cual se refiere a la probabilidad de que los datos se comportan con normalidad por azar con la siguiente regla de decisión; si **p>0.05** se dice que, no existe evidencia suficiente para afirmar que los datos no son normales, por lo tanto, se asume normalidad y si **p≤0.05**, existe evidencia suficiente de que no son normales.

Tabla 15.

Resultados de la prueba Shapiro-Wilk.

Descriptivas	Grupo	Pretest	Posttest
W de Shapiro-Wilk	Experimental	0.958	0.969
	Control	0.977	0.909
Valor p de Shapiro-Wilk	Experimental	0.398	0.654
	Control	0.938	0.110

Este análisis cuantitativo se definió a partir de estas medidas, como se muestra en la Tabla 15 al obtener estos valores donde al no encontrarse evidencia significativa de que los datos no son normales, no se rechaza la normalidad en los datos tomando en cuenta que ambas pruebas y en ambos grupos tienen un valor de **$p > 0.05$** . Por ello, al aplicar la regla de decisión se llega a que la prueba que se debe aplicar debe ser de tipo paramétrica, eligiendo como lo más conveniente en utilizar una t de Student.

6.3. Análisis cuantitativo.

En este apartado se presentan los resultados obtenidos a partir de la prueba t de Student para muestras independientes utilizando el software Jamovi, con el cual además de haber realizado la prueba de normalidad se analizaron los datos, para alcanzar uno de los objetivos específicos el cual es *“evaluar el alcance que tiene el uso de la modelación matemática y la traducción de representaciones semióticas en sistemas de ecuaciones lineales, comparando los aprendizajes de los estudiantes antes y después de la secuencia, además de los resultados entre el grupo de control y experimental”*.

Para poder valorar el alcance que ha tenido la secuencia diseñada para el tema de sistemas de ecuaciones 2x2, se han sometido a la prueba paramétrica los resultados obtenidos a través de los siguientes instrumentos:

1. **Diagnóstico.** Antes de diseñar y aplicar la secuencia se realizó un examen para medir los conocimientos previos de los estudiantes e identificar el nivel que llevarán las situaciones a plantear, el cual fue implementado en ambos grupos.
2. **Posttest.** Consistió en aplicar el examen inicial con pocas modificaciones aplicado en ambos grupos para medir el nivel alcanzado sobre la solución de problemas que implican un sistema de ecuaciones en comparación al inicio (ver anexo F).

6.3.1. Observaciones de los resultados obtenidos de los exámenes.

Los resultados del diagnóstico se presentaron previamente al diseño del plan de acción, en la Tabla 16 se encuentran representados de forma general:

Tabla 16.

Medidas generales obtenidas en el diagnóstico.

Grupo	Promedio	Mediana	Max-Min	Rango
Experimental	4.29	4.20	6 - 2.3	3.7
Control	3.26	3.30	5.6 - 1.3	4.3

Se puede observar que los resultados del grupo experimental arrojaron datos ligeramente más altos en comparación al grupo de control pues mientras el primero alcanzó una media de 4.2 la del de control es 3.2, además de que la distribución de los datos es menor en el grupo experimental lo que se traduce en cantidades más uniformes, mientras que en el otro grupo tiene un mayor rango.

Por otra parte, se tiene el examen aplicado después de implementar la secuencia, el cual contiene los mismos reactivos del diagnóstico y los mismos indicadores, los resultados generales de esta prueba final se muestran en la Tabla 16.

Tabla 17.

Medidas generales obtenidas en el post-test.

Grupo	Promedio	Mediana	Max-Min	Rango
Experimental	5.8	5.5	9.2 - 1.7	3.7
Control	5.2	5.2	8.2 - 1.7	4.3

En las medidas que proporciona la Tabla 17, el grupo experimental obtuvo un promedio de 5.8, significativamente superior al promedio del grupo de control el cual fue de 5.2, estos resultados son derivados de diversas situaciones durante la aplicación de la secuencia; aunque se muestra que existe una comprensión más significativa ante la solución de situaciones problema que implican sistemas de ecuaciones, el grupo de control muestra un rango de respuestas más amplio.

A continuación, se presenta en la Tabla 18 una sumatoria de las respuestas de una matriz de 0 y 1 sobre el examen final, donde 0 es una respuesta incorrecta y 1 una respuesta correcta, estas sumatorias están integradas por indicadores:

Tabla 18.

Aciertos por indicadores en el post-test.

Grupo	Condición	Interpreta situaciones.	Conoce las bases operativas del álgebra.	Domina los conocimientos de linealidad.	Plantea sistemas de ecuaciones.	Resuelve sistemas de ecuaciones.	Interpreta representaciones gráficas.
Grupo experimental	Contestaron correctamente	35	47	64	22	9	7
	Contestaron	13	25	32	50	15	17

	incorrectamente						
Grupo de control	Contestaron correctamente	12	28	44	14	2	3
	Contestaron incorrectamente	20	20	19	34	14	13

Al contrastar los aciertos acumulados por grupo se hace un poco más significativa la efectividad de la secuencia aplicada en el grupo experimental, pues la mayoría de los datos correspondientes muestra mayor cantidad de aciertos en proporción al grupo de control, principalmente en el indicador de mayor interés que es la interpretación de situaciones en otras representaciones.

Además se puede observar que aunque las actividades diseñadas se enfocaron en la solución de situaciones problema que implican un sistema de ecuaciones, los estudiantes lograron apropiarse de conocimientos como el planteamiento de sistemas de ecuaciones y la visualización gráfica de un sistema de ecuaciones; estos resultados dan a conocer que los estudiantes del grupo experimental no solo utilizaron sus propias representaciones y procedimientos, si no que al llegar a la etapa de Institucionalización lograron formalizar los aprendizajes con ayuda del docente y GeoGebra.

6.3.2. Comparación de resultados de las pruebas.

Para poder realmente definir cuál ha sido el alcance de la secuencia que fue aplicada en el tema se sistemas de ecuaciones lineales, se han calculado medidas estadísticas a los resultados obtenidos en el diagnóstico y el postest implementados tanto al grupo experimental como al grupo de control. A partir del diagnóstico se pudo identificar el nivel de donde debían partir las actividades, mientras que el postest abrió la posibilidad de evaluar los conocimientos alcanzados una vez aplicada la intervención.

Tabla 19.*Ganancia = Postest - Pretest*

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Exp.	1.8	2	0.2	3.9	1.2	3	0.1	3.9	0.2	2.7	0.4	1.4	4.6	0.9	0.8	1.1	0.6	2.1	2.2	2.5	0.8	1.9	1.8	1.7
Cont.	3.5	1	1.3	1.5	0.4	0.1	2	3.8	0.9	0.5	3.5	4.3	3.5	5.2	2.1	0.4								

Con el propósito de conocer las diferencias entre los resultados de los grupos, se calculó la ganancia de puntaje obtenida por cada estudiante tomando como base los promedios de los resultados en ambos exámenes como se muestra en la Tabla 19. Además, para aterrizar este enfoque cualitativo se aplicó una prueba estadística paramétrica; la cual fue seleccionada debido a que no se encontró suficiente evidencia de anormalidad en los datos, esta prueba como ya se mencionó anteriormente es una t de Student para muestras independientes.

Una **t de de Student** menciona Sánchez Turcios (2015) que su naturaleza consiste en comparar las diferencias entre dos muestras que aparentan una distribución normal y homogeneidad en sus varianzas, donde para decidir si se rechaza o no se rechaza la hipótesis nula depende de si existen diferencias significativas entre las medidas de las muestras.

6.3.3. Prueba t de Student.

Hipótesis nula (H_0): No existen diferencias significativas en los puntajes del postest de sistemas de ecuaciones lineales entre los estudiantes del grupo experimental y del grupo control.

$$\mu_{Experimental} \leq \mu_{Control}$$

Hipótesis alternativa (H₁): Los estudiantes del grupo experimental obtienen puntajes significativamente mayores en el postest de sistemas de ecuaciones lineales que los estudiantes del grupo control.

$$\mu_{Experimental} > \mu_{Control}$$

Como se muestra en la Tabla 20 los resultados obtenidos al aplicar la prueba t de Student muestra que no existen diferencias estadísticamente significativas entre los puntajes de ambos grupos alcanzados durante el postest. Aunque la medida de la media del grupo experimental (M = 5.82) es superior a la del grupo de control (M= 5.27), esta diferencia no alcanzó significancia estadística. Por lo tanto, **no se rechaza la hipótesis nula**, al no contar con evidencia suficiente.

Tabla 20.

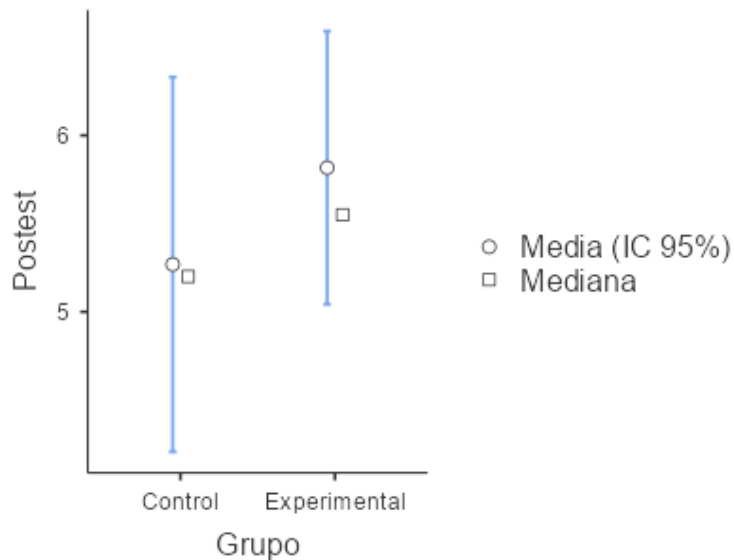
Prueba t para Muestras Independientes.

	<i>Estadístico</i>	<i>gl</i>	<i>p</i>	<i>Tamaño del Efecto</i>
Postest	<i>T de Student</i> = -0.836	38.0	0.204	<i>La d de Cohen</i> = -0.270

Nota. H_a $\mu_{Control} < \mu_{Experimental}$

Figura 31.

Comparación de resultados en el Postest.



Nota: Elaboración propia con ayuda del software Jamovi.

La Figura 31 muestra precisamente la diferencia que existe entre los resultados de los grupos, donde se puede observar que, aunque el grupo experimental tiene un mayor número de datos, estos se encuentran contenidos en resultados más uniformes, con respecto al grupo de control que a pesar de ser un conjunto pequeño sus datos tienen un mayor rango.

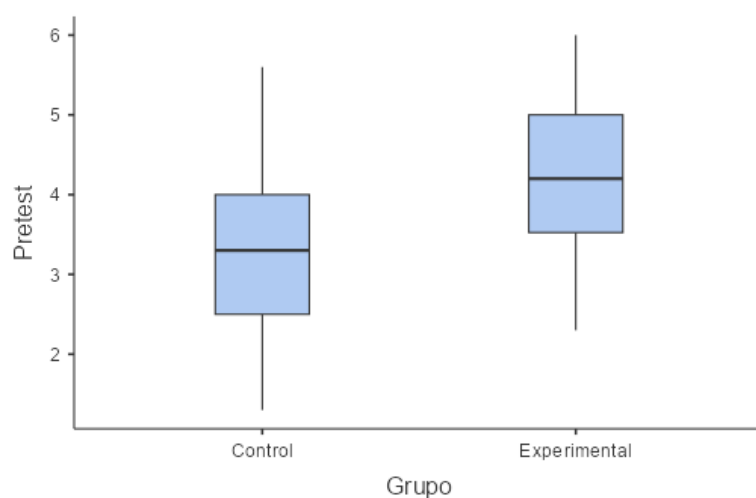
Aunque no se identificaron diferencias significativas entre los resultados de los grupos, las medidas descriptivas tienden a favorecer hacia el grupo experimental como se muestra en la Tabla 20. Esto no significa falta de evidencia o ausencia de efectos a partir de la intervención. Algunos factores que pueden influir en los resultados obtenidos en este análisis cuantitativo son el tamaño de la muestra, la sensibilidad del instrumento y las ausencias de algunos de los estudiantes durante la aplicación y evaluación de la intervención.

6.4. Resultados obtenidos en los grupos tratados.

En este breve apartado, se presenta a grandes rasgos los resultados obtenidos en cada grupo y las particularidades que se alcanzaron ante las secuencias que se desarrollaron respectivamente, donde el grupo experimental fue aplicado el plan de acción diseñado con la modelación de situaciones que implican un sistema de ecuaciones, para buscar su solución a través de las etapas de ACODESA y el apoyo de GeoGebra y en el grupo de control una secuencia con problemas no contextualizados guiada con base en los métodos de solución para sistemas de ecuaciones.

Figura 32.

Comparación de grupos durante el Pretest.

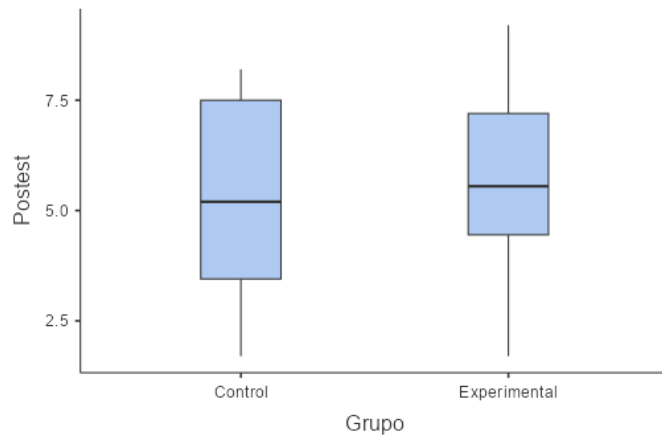


Nota: Elaboración propia con ayuda del software Jamovi.

La Figura 32 muestra una gráfica donde se compara el punto inicial de los grupos muestra para esta investigación, donde la totalidad de los estudiantes se encontraba en un nivel que informaba que los estudiantes tenían nociones algebraicas, las cuales sirvieron como base para el diseño de las secuencias y con estos resultados contrastar el avance posteriormente de la aplicación.

Figura 33.

Comparación de grupos durante el Postest.



Nota: Elaboración propia con ayuda del software Jamovi.

- Grupo experimental: Se puede apreciar en la Figura 33 que la mayoría de los estudiantes alcanzaron un nivel aprobatorio, donde se observó que los estudiantes lograron interpretar problemas y situaciones que implican sistemas de ecuaciones en las formas según el estudiante considera más fácil resolverlo, además de poder transitar entre dos representaciones y una visualización de sus resultados en las representaciones algebraicas y gráficas.
- Grupo de control: Como muestra la Figura 33 existe una mayor dispersión entre los resultados obtenidos, sin embargo, la mayoría de los estudiantes también aprobó, debido a que se observó que lograron interpretar problemas hacia una representación algebraica utilizando literales que para ellos representaban elementos importantes de los problemas, transitando entre estas dos representaciones y aplicar el método de solución que consideran más fácil de seguir.

VII. Conclusiones, limitaciones y alcances.

En este último capítulo se compartirán las conclusiones a las que se ha llegado con respecto a los objetivos que se plantearon al inicio de este trabajo, seguido de ello se mencionan los alcances y limitaciones que se obtuvieron durante la intervención de la secuencia y finalmente el punto de partida y la perspectiva para futuros trabajos que se relacionan con las líneas de investigación relacionadas con modelación matemática, álgebra y el papel de la tecnología dentro de la enseñanza de las matemáticas.

7.1. Conclusiones.

El trabajo desarrollado en esta investigación, tuvo como principal finalidad apalear a la problemática identificada a través de la experiencia dentro del aula, en la enseñanza de las matemáticas; siendo la falta de sentido, significado y utilidad de los estudiantes al tratar con temas de álgebra, en este caso los sistemas de ecuaciones lineales convirtiéndose en abstracciones que difícilmente se aprenden.

De acuerdo con el objetivo general, se logró realizar un análisis detallado de las representaciones que los estudiantes produjeron a través del proceso de modelación matemática para la construcción de sistemas de ecuaciones; esto con la ayuda del diseño de una secuencia didáctica basada en las fases de la metodología ACODESA y apoyándose del software GeoGebra.

A continuación, se retoma cada uno de los objetivos específicos contrastando con las conclusiones obtenidas en esta investigación esto con la finalidad de dar una respuesta hacia la pregunta de investigación que hace girar este trabajo:

1. Diagnosticar.

Este objetivo se considera cumplido, ya que se realizó el diseño y aplicación de un examen diagnóstico, donde a través de los resultados obtenidos se identificaron puntos de mejora y conocimientos algebraicos de los estudiantes, estas características sirvieron de base para secuenciar el nivel de complejidad de las situaciones que se plantearon y el diseño de la secuencia en general.

Estos resultados guiaron el planteamiento de la primera situación que consiste en el planteamiento de un primer sistema de ecuaciones con dos incógnitas, en este caso la solución podría encontrarse fácilmente realizando operaciones aritméticas, la segunda situación se guiaba de los conocimientos sobre álgebra lineal de los estudiantes donde se agrega una constante de crecimiento al sistema de ecuaciones y finalmente para aumentar el nivel con respecto a lo encontrado se plantea un punto de equilibrio.

2. Diseñar e implementar.

Este objetivo ha sido crucial para esta investigación, realizando el diseño de cada una de las situaciones didácticas a partir de sistemas de ecuaciones. Utilizando los elementos teóricos y metodológicos como es la Modelación Matemática y la Teoría de Registros de Representación Semiótica destinadas para interpretar los procedimientos de los estudiantes y la metodología ACODESA que definió cada uno de los momentos de la secuencia diseñada.

Cada una de las actividades que se diseñaron contribuyeron a que los estudiantes buscarán sus propias alternativas para resolver las situaciones que implican a los sistemas de ecuaciones lineales; donde el trabajar con problemas contextualizados se benefició a que los estudiantes realmente se situarán en el contexto y visualizaron una necesidad de hallar

una solución; sobre todo en la actividad 2, pues al ser una actividad muy llamativa para los jóvenes causó un interés mayor en comparación con las otras actividades.

Trabajar con las fases de la metodología ACODESA, permitió a los estudiantes contrastar sus ideas propuestas en la fase inicial, pasando por un proceso de validación y refinamiento de cada una de las representaciones que ellos crearon, donde la mayoría de las ocasiones se llegaba al mismo resultado; abriendo para los estudiantes un conjunto de formas en las que se puede resolver un solo problema y dejando a su criterio el desarrollo.

3. Analizar.

Una vez que se identificaron las principales dificultades, se describieron las representaciones usadas por los estudiantes y haber explicado el papel de la modelización matemática como una estrategia didáctica en los apartados posteriores, se cumple el análisis de cómo existe un beneficio al resolver problemas de matemáticas cuando se tiene una comprensión de para qué sirve lo que se está aprendiendo.

Tal beneficio existe debido a que no se da lugar a la pregunta que constantemente realizan los estudiantes en la mayoría de los temas de álgebra; en este caso: ¿para qué sirve aprender sobre sistemas de ecuaciones?, ya que se comienza desde la necesidad de utilizarlos y no solo realizar una formulación a partir de las características del problema planteado y siguiendo pasos de un método previamente establecido.

3.1. Identificar.

Una de las tareas para complementar el análisis para valorar la efectividad de la intervención ejecutada fue la identificación de las dificultades que presentaron los estudiantes del grupo experimental en cada una de las actividades, donde se encontró que

los estudiantes entran en un proceso de adaptación a la forma en la que se plantean las actividades en ACODESA y modelación matemática.

Al no tener referencias de cómo resolver problemáticas de este tipo sus primeras dificultades son la búsqueda de una forma de representar la información y dar una solución a lo que se está trabajando y las otras ante la aceptación o consideración de que existen otros modelos matemáticos de cómo tratar un mismo tema como son las representaciones tabulares y de lenguaje común durante la segunda y tercera actividad.

Concluyendo que, aunque las dificultades se fueron resolviendo a lo largo de los momentos de la secuencia, es menester fijarse en cada una de las dificultades que se presentan pues en el futuro se puede poner una mayor consideración en estos aspectos y buscar alternativas que permitan realizar de forma segura y asertiva el momento donde el estudiante se decide a llevar a cabo un procedimiento.

3.2. Describir.

El cuerpo del análisis en este caso es tomado por la descripción de cada una de las representaciones que se lograron en el grupo experimental y contrastando con las logradas en el grupo de control, aunque esta descripción fue exhaustiva pueden existir elementos que no fueron tomados en cuenta de principio a fin, como es el papel de los estilos de pensamiento matemático.

Entre las respuestas de los estudiantes se pudo notar los estilos de pensamiento que dominaban el procedimiento; identificando en las tres actividades que algunos estudiantes prefieren encontrar una solución rápida con base en operaciones aritméticas, mientras que otros comienzan por dar razones o ideas a partir de contextos o situaciones que ellos

conocen, como es el ganar más dinero, la opinión ante la estrategia de una venta o incluso cómo llegan ellos a la escuela.

Se alcanzaron a describir cada una de las distintas representaciones obtenidas como son la ideas en el lenguaje común, la representación tabular, algebraica, con operaciones aritméticas y la representación gráfica y cuál era la opinión de los estudiantes al tomar estos registros como la forma más fácil de traducir la información que se les había dado, por ello son estos procedimientos los que dieron pie a la comprensión y sentido de la raíz del existir de un sistema de ecuaciones cuando se trabaja con GeoGebra.

3.3. Explicar.

El papel que mantiene la modelación matemática como estrategia didáctica es la de la búsqueda indefinida y uso de modelos matemáticos existentes o creados para hallar una solución, es el medio por el cual un estudiante aplica lo que conoce y crea su propia herramienta para resolver problemas de matemáticas de este tipo y a su vez el paso entre la realidad y las matemáticas.

Por qué el mundo real es todo lo que se encuentra fuera de las matemáticas, que carece de soluciones o de un análisis para poder intervenir en ello, y el mundo de las matemáticas son los recursos que se crean para intervenir en la realidad, en otras palabras, referente al marco teórico son los símbolos y signos (*semiosis*) que muestran lo que no es palpable.

En este sentido, se modela realmente cuando se consideran las características del mundo real para crear un modelo matemático que ayude a intervenir de una forma más fácil y correcta, en el caso de los sistemas de ecuaciones los estudiantes crearon tablas, literales e ideas escritas, además con ayuda del docente mediante GeoGebra se pudo visualizar e

intervenir en esas situaciones, con los modelos matemáticos existentes: la representación algebraica y la representación gráfica.

Otro aspecto que el ciclo de la modelación matemática ejerce al intervenir en una situación es que el punto de partida para el procedimiento es desde el mundo real y se interviene matemáticamente; sin embargo, al final de cada ciclo se cuenta con dos respuestas una en la forma matemática y otra de acuerdo a la situación; este es el punto donde el modelo matemático toma un sentido de existir.

4. Evaluar.

A través del análisis cuantitativo que se incrusto en este trabajo, se ha logrado evaluar los efectos que ha tenido utilizar a la modelación matemática y los registros de representación semiótica en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales; al comparar los resultados obtenidos durante el diagnóstico (pretest) y los obtenidos después de la intervención con el postest.

Donde a pesar de que no se encontraron evidencias estadísticas significativas de que hubo un mayor promedio en comparación al grupo de control, si existe un aumento en estos resultados los cuales se complementan con el análisis de las representaciones usadas por los estudiantes, pues mientras el grupo experimental utilizaba sus propios modelos matemáticos, el grupo de control utilizaba solo el lenguaje común y el lenguaje algebraico.

De esta manera concretamos estas conclusiones dando respuesta a la pregunta general del trabajo desarrollado:

¿Cómo influye el uso de modelación matemática, para lograr un aprendizaje significativo en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en un grupo de segundo grado de secundaria?

El uso del proceso de modelación matemática influye en la forma de cómo se aprenden los sistemas de ecuaciones lineales, en el momento en que los estudiantes utilizan lo que conocen para intervenir en las situaciones planteadas y aportan ideas desde sus experiencias como es el manejo de un pequeño negocio; influye en el tipo de respuestas que se obtienen al no tener una serie de pasos a seguir pues ahora sus respuestas vienen de varios modelos matemáticos según el estudiante lo decidió como la forma más fácil de interpretarlo.

El hecho por el que se utilizó un enfoque mixto para esta investigación, pues no solo era probar si existía un promedio mayor o una mejora entre dos grupos que, si bien es algo importante, se busca diferenciar entre lo que se sabe hacer y lo que tiene un significado de hacerse; es decir, que sepan cuándo usar lo que aprenden y cómo usarlo.

Por un lado, si sólo se usaba el lado cuantitativo, no se hubiera apreciado que, aunque el grupo de control transitaba entre dos representaciones matemáticas formales, sólo se logró que se siguiera una serie de pasos “correctamente”. En cambio, aunque el grupo experimental tuvo un proceso más tardado para poder construir un sistema de ecuaciones o utilizar literales, se obtiene un aprendizaje real de cuándo sabe dónde utilizar este tipo de planteamientos.

Por otro lado, si sólo se tomaba el lado cualitativo, no se hubiera llegado a la validación de esta propuesta como se evidenció en la comparación de resultados de las

pruebas, por tanto, el enfoque mixto brindó claridad en los objetivos que se fijaron para este proyecto.

En este caso la parte cualitativa contribuyó al mostrar cómo influye la modelación matemática en los sistemas de ecuaciones y cuáles fueron los principales registros utilizados por los estudiantes y la parte cuantitativa en la valoración del incremento de los conocimientos con respecto al inicio de la intervención.

Y para aterrizar influye en la institucionalización del conocimiento matemático, de una manera que para el estudiante ya no le es raro o desconocido utilizar un símbolo o una letra y esta visualización se intensifica cuando se tiene el apoyo de un software como GeoGebra donde se aprecian las cantidades que ellos encontraron y el punto de intersección que identificaron como las respuestas hacia las situaciones planteadas.

7.2. Alcances y limitaciones.

El aporte que brinda esta investigación se encuentra en la demostración con evidencias, que el uso de la modelación matemática ayuda a darle un sentido y significado al uso de expresiones algebraicas; en este caso los sistemas de ecuaciones lineales en actividades cotidianas, que se favorece la seguridad en el uso de un procedimiento propio para la resolución de un problema y no seguir siempre algo que ya existe.

Por otra parte, es necesario mencionar que esta investigación aporta al uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas, permitiendo visualizar los resultados de una situación en su forma matemática y dando confianza a los estudiantes, como herramienta de corroboración de que sus procedimientos fueron correctos, y el empleo de metodologías de la investigación con base en teorías del aprendizaje como es ACODESA ya que se muestra

cómo permitió que los estudiantes utilizarán sus propias representaciones e ir las refinando hasta llegar a una sola que representará mejor cada situación.

Aunque estos aportes y resultados son prometedores, este proyecto se enfrentó a algunas limitaciones que influyeron en los alcances y que se mencionan a continuación.

Una de las principales limitantes fue el tiempo reducido asignado para la intervención, ya que solo se contó con dos semanas de cuatro sesiones cada una para desarrollar la secuencia. Esto implicó reducir el tiempo entre cada fase de la metodología y el tiempo destinado para el uso de GeoGebra. Aun así, se mantuvo una organización entre cada momento de la secuencia de forma que los estudiantes lograron contrastar sus procedimientos.

Otro factor que afectó la comparación entre las intervenciones, fue trabajar con un grupo de control integrado por alumnos con distintos niveles de aprendizaje canalizados a USAER, exigiendo la adaptación constante de las actividades, con situaciones problema más sencillos y atractivos, además de un acompañamiento constante para su comprensión.

También existieron factores que limitaron el buen desarrollo de la fase de institucionalización y el uso de GeoGebra; el primero fue el tiempo destinado para la intervención reduciendo el espacio para la exploración y uso de la herramienta, la cantidad de equipos con los que cuenta la institución es reducido por lo que se tomó la decisión de trabajar por equipos de tres integrantes.

Además, se presentaron implicaciones al utilizar la herramienta debido a que los equipos procesan de una forma muy lenta y por consecuencia la graficación de los sistemas de ecuaciones fue muy tardada, lo que ocasionó un poco de desinterés hacia la actividad, aumentando a ello opiniones negativas por parte de profesores titulares, ante el uso de

herramientas tecnológicas derivado de la calidad de los equipos y el desconocimiento de cómo utilizar GeoGebra de una forma efectiva.

De la misma forma, se considera un aspecto que limita la comparación de la efectividad entre las intervenciones al tamaño de la muestra considerada para los resultados del pretest y posttest, debido que, aunque los grupos tienen un número mayor de integrantes no se consideró su totalidad para la valoración en la prueba t de Student ya que se registraron ausencias de más de cuatro sesiones por causas de índole independientes.

Reconocer todas estas limitantes no es considerar que afecte a los resultados que se obtuvieron, sino que permite la oportunidad de reinventar la secuencia, fijándose principalmente en el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas de forma más eficiente y abriendo a nuevas posibilidades para fortalecer investigaciones en un futuro.

7.3. Sugerencias para futuras investigaciones.

Partiendo de estos hallazgos que se obtuvieron, se pueden enlistar posibles alternativas para el seguimiento de este trabajo de investigación:

- Continuar este proyecto, fijándose en las dificultades que tuvieron los estudiantes al enfrentarse a las situaciones que implican un sistema de ecuaciones lineales.
- Diseñar secuencias didácticas basadas en los ciclos de la modelación matemática para otros contenidos matemáticos, como es el trazo de polígonos regulares o las rectas y puntos notables del triángulo y del círculo.
- Ampliar el nivel de complejidad diseñando una secuencia para el nivel medio superior u otro tipo de ecuaciones.

- Desarrollar actividades propias de GeoGebra, para una mejor implementación de la tecnología.
- Seguir el uso de metodologías basadas en teorías del aprendizaje como ACODESA o la ingeniería didáctica.

Como sugerencias para otras investigaciones, se debe considerar que el diseño y la creación de las situaciones debe cumplir con las características establecidas para el desarrollo completo de un proceso de modelación matemática, es decir, partir desde una actividad social o de cualquier índole que carezca de una solución o intervención matemática.

Replicar un rediseño de esta secuencia didáctica para otros grupos ya sea de nivel secundaria o media superior, donde el objetivo sea una comparación entre las representaciones encontradas y las dificultades para observar si son los mismos resultados. Además de que con esta experiencia se recomienda buscar actividades que para los alumnos sean llamativas o bien significativas.

Por último, se concluye que este proyecto atiende a la problemática plateada, representando una innovación en la forma de la enseñanza del álgebra; integrando elementos importantes en investigación sobre la educación en matemáticas, como la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y la modelación matemática, atendiendo a lo que propone la NEM en cuanto a la contextualización de los temas matemáticos.

Referencias.

- Aguilar Jasso, J. M. (2021). *El desarrollo del lenguaje matemático mediante el uso de las TICS en el tema de sistemas de ecuaciones en un grupo de 2° grado de secundaria*. [Ensayo pedagógico de Licenciatura, Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí] BECENE. <https://repositorio.beceneslp.edu.mx/jspui/handle/20.500.12584/914>
- Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). UNA PERSPECTIVA DE LA MODELACIÓN DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 18(1), 19–48. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1811>
- Ariza Herreño, J. (2021). *Sistemas de ecuaciones lineales*. Repositorio Institucional de la Universidad de San Marcos. [LEC MATE 0002 2021.pdf](#)
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58. https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH601/3rd%20%26%204rth%20unit/3rd%20unit_Modelling%20cycle.pdf
- Blum, W., & Niss, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educ Stud Math* **22**, 37–68 (1991). <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Borjón Robles, E., Torres Ibarra, M. del R., y Sosa Guerrero, L. (2015, mayo). *Representaciones Semióticas de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2x2 con Excel*. En Comunicación XVI CIAEM-IACME. Chiapas, México.
- Confrey, J., y Maloney, A. (2007). Una teoría del modelado matemático en entornos tecnológicos. En: Blum, W., Galbraith, PL, Henn, HW., Niss, M. (eds.) *Modelado y aplicaciones en la*

educación matemática. Nueva serie de estudios del ICMI, vol. 10. Springer, Boston, MA.

https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_4

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega Restrepo, Trad.; 2.^a ed.). Universidad del Valle.

Escuelasmex.com. (2023). *CCT Escuelas México: Primarias, Preescolares y Secundarias cerca de mí*. <https://escuelasmex.com/directorio/24DES0026H/francisco-gonzalez-bocanegra>

Ferrari Escolá, M., Trejo Martínez M., y Méndez Guevara M. E. (2018). Modelación escolar: Análisis de las variaciones en gráficas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1512-1518. <https://www.academia.edu/download/101849951/224784126.pdf>

Figuerola Vera, R. E. (2013). *Resolución de problemas con un sistema de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas*. [Tesis de magíster en enseñanza de las matemáticas, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Pontificia Universidad Católica del Perú Escuela de Graduados. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/4736>

Galagovsky, L. R., y Cittadini, P. E. (2008). Enseñanza de ecuaciones lineales en contexto. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 26(3), 359-374. <https://ensciencias.uab.es/article/view/v26-n3-galagovsky-cittadini>

García, T., Tigselema, J., Portero, E., y Vinueza, W., (2025). Innovación Didáctica con la Matriz Inversa: Estrategias Visuales y Tecnológicas para Mejorar la Comprensión en Álgebra Lineal. *Reincisol*, 4(8), pp. 1112-1135. [https://doi.org/10.59282/reincisol.V4\(8\)1112-1135](https://doi.org/10.59282/reincisol.V4(8)1112-1135)

Gómez Leal, D. S. (2015). *Uso de los saberes matemáticos en la actividad profesional de un ingeniero electrónico*. [Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de San Luis Potosí].

Hernández-Moreno, A., Cervantes-Barraza, J. A., Ordoñez-Cuastumal, J. S., y García González, M. del S. (2017). *Teoría de registros de representaciones semiótica*. Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa.

https://www.researchgate.net/profile/Antonia-Hernandez-Moreno/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA/links/58e7c722a6fdccb4a83006f5/TEORIA-DE-REGISTROS-DE-REPRESENTACIONES-SEMIOTICA.pdf

Hernández Sampieri, R., Fernández-Collado, C., y Baptista Lucio P. (2006). *Metodologías de la investigación* (4.ª edición). McGraw-Hill Interamericana.

Hernández Sampieri, R., Fernández-Collado, C., y Baptista Lucio P. (2010). *Metodologías de la investigación* (5.ª edición). McGraw-Hill Interamericana.

Hitt F., y Cortés J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. Revista digital Matemática, Educación e Internet, Vol. 10, n°1, pp. 1-30. Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique: modèles, dispositifs et pratiques. Éditions Hermès. http://www.hitt.uqam.ca/mat3225_fich/Hitt_Chap_07.pdf

- Jara Cango, J. A., Tocto Maldonado, J. S., y Vivanco Román, J. (2025). Modelación matemática como estrategia didáctica en el aprendizaje de ecuaciones lineales. *Ciencia y educación*, 6(9), 6-18. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17168435>
- Lladó, À. G., Agudelo, C., Vásquez, S., Verbisck, J., Pipitone, C., Barquero, B., y Bosch, M. (2025). De la disciplina a la interdisciplinariedad: Aprendiendo energía y estadística en la formación inicial del profesorado de Primaria. *En Actas del XII Congreso internacional sobre investigación en Didáctica de las Ciencias 2025* (pp. 1185-1188). https://www.researchgate.net/profile/Carlos-Agudelo-Carvajal/publication/396559029_De_la_disciplina_a_la_interdisciplinariedad_Aprendiendo_energia_y_estadistica_en_la_formacion_inicial_del_profesorado/links/68f64b84f3032e2b4beac4b7/De-la-disciplina-a-la-interdisciplinariedad-Aprendiendo-energia-y-estadistica-en-la-formacion-inicial-del-profesorado.pdf
- López Gómez, J. I., y Flores Samaniego, A. H. (2012). Modelación matemática en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 653–660. <https://clame.org.mx/documentos/alme25.pdf>
- Mejía Alemán, L. V., Gallo Águila, C. I., y Quintana Sánchez, D. J. (2022). La modelación matemática como estrategia didáctica para la resolución de problemas matemáticos. *Horizontes. Revista De Investigación En Ciencias De La Educación*, 6(26), 2204–2218. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i26.485>
- Mateos, C. (2000). La modelación física en las obras hidráulicas. *Ingeniería del Agua* 7(1), 55-70. <https://iwaponline.com/IA/article-abstract/7/1/55/68297>
- Obando Zapata, G., y Muñera Córdoba, J. J. (2003). *Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática*. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 185-199.

https://www.academia.edu/download/105535654/ObandoGilberto_2003_Situacionesproblemaestrategia.pdf

Ocampo Cuevas, A., y Torres Ibarra, M. del R. (2025). Sistemas de ecuaciones lineales en contexto STEM: un análisis del estado del arte. *Revista AMIUTEM*, 13(1), 11–19.

Recuperado a partir de

<https://revista.amiutem.edu.mx/index.php/relecamiutem/article/view/259>

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(1), 71-98.

<https://comunicacion-cientifica.com/doi/cc309/309-05.pdf>

Rodríguez Gallegos, R., y Quiroz Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(1), 99-124.

https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362016000100099&script=sci_arttext

Rodríguez Gallegos, R., y Quiroz Rivera, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación matemática*, 28(3), 91-110.

<https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n3/1665-5826-ed-28-03-00091.pdf>

Rodríguez Jara, M. A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J., Vásquez Saldías, P., y Del Valle Leo, M. E. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza De Las Ciencias. Revista De investigación Y Experiencias didácticas*, 37(1), 71–92. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194>

Rodríguez Ibarra, M. A., y Soto Munguía, J. L. (2011, marzo) *Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria, diseñadas con la metodología ACODESA*.

Ponencia presentada en el coloquio en didáctica de las matemáticas, Universidad de Quebec en Montreal, Quebec, Canadá.

Sánchez Turcios, R. A. (2015). t-Student. Usos y abusos. *Revista Mexicana de Cardiología*, 26(1), 59-61. <https://www.scielo.org.mx/pdf/rmc/v26n1/v26n1a9.pdf>

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2022). Plan de Estudio 2022 para la educación preescolar, primaria y secundaria. Gobierno de México. <https://www.sep.gob.mx>

Segura de Herrero, S. M., (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 7(1), 49-78. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33570103>

Tamayo y Tamayo, M. (1986). *La interdisciplinariedad*. Serie cartillas para el docente ICESI

Vicencio Cáceres, B. (2017). Representación semiótica Raymond Duval. Scribd. <https://www.scribd.com/document/382224780/Representacion-Semiotica-Duval>

Vidal Ledo, María, y Rivera Michelena, Natacha. (2007). Investigación-acción. *Educación Médica Superior*, 21(4) Recuperado en 28 de febrero de 2026, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21412007000400012&lng=es&tlng=es.

Villanueva Couoh, F. J. (2022). *Metodología de la investigación*. Klik soluciones educativas.

ANEXOS

Anexo A

Examen diagnóstico

Nombre:

Fecha:

Grado y grupo:

- Representa en una operación de matemática, que Juan es dueño de una tienda donde venden refrescos y jugos; donde al comprar un refresco y un jugo cuesta \$33, y si compras dos jugos son \$30
 - Verdadero
 - Falso
- Para resolver 4^3 se multiplica 4×3 .
 - División de potencias
 - Multiplicación de potencias
 - Exponente negativo
 - Potencia de potencia
- ¿Cuál es el 25% de 300?
 - 75
 - 57
 - 300
 - 25
- Relaciona las operaciones con la respuesta correcta.

• $-3-6=$	20
• $5(-4)=$	-9
• $5(4)=$	42
• $-13+15=$	-20
• $(-6)(-7)=$	2
- De las siguientes ideas. ¿Cuál define mejor a una ecuación?
 - Es un conjunto de letras y números.
 - Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
 - Es una expresión que tiene un exponente.
 Elige la opción que es un ejemplo de ecuación lineal
 - $2x^2+3x-35=0$
 - $x^2+3x^2=100$
 - $2x+5=27$
- Al pensar en un número, le sume 15 y obtuve como resultado 27. ¿Cuál es el número que se pensó?
 - 15
 - 27
 - 12
 - 42
- El perímetro de un pentágono es de 80 cm. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?
 
 - 10cm
 - 16cm
 - 8cm
 - 5cm
- La encargada de una cafetería quiere vender fruta esta semana, y ha comprado de dos tipos. Su hija le pregunta: ¿mamá cuántas manzanas Y cuántas naranjas compraste? -.

La madre le dice: -te voy a dar dos pistas para que encuentres cuántas manzanas y cuántas naranjas compré.

Primera pista: en total compré 68 frutas. Segunda pista: el número de naranjas es el triple que el número de manzanas. ¿Cuántas frutas compré de cada tipo?

 - 51 manzanas y 18 naranjas
 - 51 naranjas y 17 manzanas
 - 13 naranjas y 20 manzanas
 - 30 manzanas y 38 naranjas

La madre le dice: -te voy a dar dos pistas para que encuentres cuántas manzanas y cuántas naranjas compré.

Primera pista: en total compré 68 frutas. Segunda pista: el número de naranjas es el triple que el número de manzanas. ¿Cuántas frutas compré de cada tipo?

- 51 manzanas y 18 naranjas
- 51 naranjas y 17 manzanas
- 13 naranjas y 20 manzanas
- 30 manzanas y 38 naranjas

11. Ordena las ecuaciones en la forma $ax+by=c$

- $2y = 25 - 3x$
 - $3y - 121 = -2x$
- $3x - 2y = 25$
 - $2x + 3y = 121$
 - $3x + 2y = 25$

12. Encuentra las ecuaciones que representan la siguiente situación.

Un alumno pagó \$30 por un sándwich y un café en la cafetería de la escuela. Hallar el precio de cada producto si el sándwich vale el doble que el café.

- $E1. s + c = 30$
- $E1. s + 2c = 30$
- $E2. s = 2c$
- $E2. s = 2c$
- $E1. s + c = 30$
- $E2. s = c$

13. Encuentra las dos ecuaciones del siguiente problema.

La edad de Antonio y Luis suman 34 años, y tres veces la edad de Antonio menos la edad de Luis es 22.

- $E1. A + L = 34$
- $E1. A + L = 34$
- $E2. A - L = 22$
- $E2. 3A - L = 22$
- $E1. 3A + L = 34$
- $E2. A + L = 22$

14. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

- $E1. 5x + 3y = 370$
 - $E2. 3x + 3y = 270$
- $x = 120$
 - $x = 30$
 - $y = 150$
 - $y = 60$
 - $x = 50$
 - $y = 40$

15. Observa la gráfica donde se representan las ecuaciones:

- $y = x - 1$
- $y = -x + 5$

Determina los valores en (x) y en (y)



Anexo B

Evidencias de las etapas individuales

06-09-20

Act 24

A que precio debe vender las piezas para que la renta sea la misma cantidad de piezas que vende?

$200 \div 30 = 20$

$250 \div 30 = 40$

$200 = 50$

$250 = 100$

$275 = 150$

$295 = 200$

$325 = 250$

$350 = 300$

$375 = 350$

$400 = 400$

$425 = 450$

$450 = 500$

$475 = 550$

$500 = 600$

$525 = 650$

$550 = 700$

$575 = 750$

$600 = 800$

$625 = 850$

$650 = 900$

$675 = 950$

$700 = 1000$

$725 = 1050$

$750 = 1100$

$775 = 1150$

$800 = 1200$

$825 = 1250$

$850 = 1300$

$875 = 1350$

$900 = 1400$

$925 = 1450$

$950 = 1500$

$975 = 1550$

$1000 = 1600$

$1025 = 1650$

$1050 = 1700$

$1075 = 1750$

$1100 = 1800$

$1125 = 1850$

$1150 = 1900$

$1175 = 1950$

$1200 = 2000$

$1225 = 2050$

$1250 = 2100$

$1275 = 2150$

$1300 = 2200$

$1325 = 2250$

$1350 = 2300$

$1375 = 2350$

$1400 = 2400$

$1425 = 2450$

$1450 = 2500$

$1475 = 2550$

$1500 = 2600$

$1525 = 2650$

$1550 = 2700$

$1575 = 2750$

$1600 = 2800$

$1625 = 2850$

$1650 = 2900$

$1675 = 2950$

$1700 = 3000$

$1725 = 3050$

$1750 = 3100$

$1775 = 3150$

$1800 = 3200$

$1825 = 3250$

$1850 = 3300$

$1875 = 3350$

$1900 = 3400$

$1925 = 3450$

$1950 = 3500$

$1975 = 3550$

$2000 = 3600$

$2025 = 3650$

$2050 = 3700$

$2075 = 3750$

$2100 = 3800$

$2125 = 3850$

$2150 = 3900$

$2175 = 3950$

$2200 = 4000$

$2225 = 4050$

$2250 = 4100$

$2275 = 4150$

$2300 = 4200$

$2325 = 4250$

$2350 = 4300$

$2375 = 4350$

$2400 = 4400$

$2425 = 4450$

$2450 = 4500$

$2475 = 4550$

$2500 = 4600$

$2525 = 4650$

$2550 = 4700$

$2575 = 4750$

$2600 = 4800$

$2625 = 4850$

$2650 = 4900$

$2675 = 4950$

$2700 = 5000$

$2725 = 5050$

$2750 = 5100$

$2775 = 5150$

$2800 = 5200$

$2825 = 5250$

$2850 = 5300$

$2875 = 5350$

$2900 = 5400$

$2925 = 5450$

$2950 = 5500$

$2975 = 5550$

$3000 = 5600$

$3025 = 5650$

$3050 = 5700$

$3075 = 5750$

$3100 = 5800$

$3125 = 5850$

$3150 = 5900$

$3175 = 5950$

$3200 = 6000$

$3225 = 6050$

$3250 = 6100$

$3275 = 6150$

$3300 = 6200$

$3325 = 6250$

$3350 = 6300$

$3375 = 6350$

$3400 = 6400$

$3425 = 6450$

$3450 = 6500$

$3475 = 6550$

$3500 = 6600$

$3525 = 6650$

$3550 = 6700$

$3575 = 6750$

$3600 = 6800$

$3625 = 6850$

$3650 = 6900$

$3675 = 6950$

$3700 = 7000$

$3725 = 7050$

$3750 = 7100$

$3775 = 7150$

$3800 = 7200$

$3825 = 7250$

$3850 = 7300$

$3875 = 7350$

$3900 = 7400$

$3925 = 7450$

$3950 = 7500$

$3975 = 7550$

$4000 = 7600$

$4025 = 7650$

$4050 = 7700$

$4075 = 7750$

$4100 = 7800$

$4125 = 7850$

$4150 = 7900$

$4175 = 7950$

$4200 = 8000$

$4225 = 8050$

$4250 = 8100$

$4275 = 8150$

$4300 = 8200$

$4325 = 8250$

$4350 = 8300$

$4375 = 8350$

$4400 = 8400$

$4425 = 8450$

$4450 = 8500$

$4475 = 8550$

$4500 = 8600$

$4525 = 8650$

$4550 = 8700$

$4575 = 8750$

$4600 = 8800$

$4625 = 8850$

$4650 = 8900$

$4675 = 8950$

$4700 = 9000$

$4725 = 9050$

$4750 = 9100$

$4775 = 9150$

$4800 = 9200$

$4825 = 9250$

$4850 = 9300$

$4875 = 9350$

$4900 = 9400$

$4925 = 9450$

$4950 = 9500$

$4975 = 9550$

$5000 = 9600$

$5025 = 9650$

$5050 = 9700$

$5075 = 9750$

$5100 = 9800$

$5125 = 9850$

$5150 = 9900$

$5175 = 9950$

$5200 = 10000$

$5225 = 10050$

$5250 = 10100$

$5275 = 10150$

$5300 = 10200$

$5325 = 10250$

$5350 = 10300$

$5375 = 10350$

$5400 = 10400$

$5425 = 10450$

$5450 = 10500$

$5475 = 10550$

$5500 = 10600$

$5525 = 10650$

$5550 = 10700$

$5575 = 10750$

$5600 = 10800$

$5625 = 10850$

$5650 = 10900$

$5675 = 10950$

$5700 = 11000$

$5725 = 11050$

$5750 = 11100$

$5775 = 11150$

$5800 = 11200$

$5825 = 11250$

$5850 = 11300$

$5875 = 11350$

$5900 = 11400$

$5925 = 11450$

$5950 = 11500$

$5975 = 11550$

$6000 = 11600$

$6025 = 11650$

$6050 = 11700$

$6075 = 11750$

$6100 = 11800$

$6125 = 11850$

$6150 = 11900$

$6175 = 11950$

$6200 = 12000$

$6225 = 12050$

$6250 = 12100$

$6275 = 12150$

$6300 = 12200$

$6325 = 12250$

$6350 = 12300$

$6375 = 12350$

$6400 = 12400$

$6425 = 12450$

$6450 = 12500$

$6475 = 12550$

$6500 = 12600$

$6525 = 12650$

$6550 = 12700$

$6575 = 12750$

$6600 = 12800$

$6625 = 12850$

$6650 = 12900$

$6675 = 12950$

$6700 = 13000$

$6725 = 13050$

$6750 = 13100$

$6775 = 13150$

$6800 = 13200$

$6825 = 13250$

$6850 = 13300$

$6875 = 13350$

$6900 = 13400$

$6925 = 13450$

$6950 = 13500$

$6975 = 13550$

$7000 = 13600$

$7025 = 13650$

$7050 = 13700$

$7075 = 13750$

$7100 = 13800$

$7125 = 13850$

$7150 = 13900$

$7175 = 13950$

$7200 = 14000$

$7225 = 14050$

$7250 = 14100$

$7275 = 14150$

$7300 = 14200$

$7325 = 14250$

$7350 = 14300$

$7375 = 14350$

$7400 = 14400$

$7425 = 14450$

$7450 = 14500$

$7475 = 14550$

$7500 = 14600$

$7525 = 14650$

$7550 = 14700$

$7575 = 14750$

$7600 = 14800$

$7625 = 14850$

$7650 = 14900$

$7675 = 14950$

$7700 = 15000$

$7725 = 15050$

$7750 = 15100$

$7775 = 15150$

$7800 = 15200$

$7825 = 15250$

$7850 = 15300$

$7875 = 15350$

$7900 = 15400$

$7925 = 15450$

$7950 = 15500$

$7975 = 15550$

$8000 = 15600$

$8025 = 15650$

$8050 = 15700$

$8075 = 15750$

$8100 = 15800$

$8125 = 15850$

$8150 = 15900$

$8175 = 15950$

$8200 = 16000$

$8225 = 16050$

$8250 = 16100$

$8275 = 16150$

$8300 = 16200$

$8325 = 16250$

$8350 = 16300$

$8375 = 16350$

$8400 = 16400$

$8425 = 16450$

$8450 = 16500$

$8475 = 16550$

$8500 = 16600$

$8525 = 16650$

$8550 = 16700$

$8575 = 16750$

$8600 = 16800$

$8625 = 16850$

$8650 = 16900$

$8675 = 16950$

$8700 = 17000$

$8725 = 17050$

$8750 = 17100$

$8775 = 17150$

$8800 = 17200$

$8825 = 17250$

$8850 = 17300$

$8875 = 17350$

$8900 = 17400$

$8925 = 17450$

$8950 = 17500$

$8975 = 17550$

$9000 = 17600$

$9025 = 17650$

$9050 = 17700$

$9075 = 17750$

$9100 = 17800$

$9125 = 17850$

$9150 = 17900$

$9175 = 17950$

$9200 = 18000$

$9225 = 18050$

$9250 = 18100$

$9275 = 18150$

$9300 = 18200$

$9325 = 18250$

$9350 = 18300$

$9375 = 18350$

$9400 = 18400$

$9425 = 18450$

$9450 = 18500$

$9475 = 18550$

$9500 = 18600$

$9525 = 18650$

$9550 = 18700$

$9575 = 18750$

$9600 = 18800$

$9625 = 18850$

$9650 = 18900$

$9675 = 18950$

$9700 = 19000$

$9725 = 19050$

$9750 = 19100$

$9775 = 19150$

$9800 = 19200$

$9825 = 19250$

$9850 = 19300$

$9875 = 19350$

$9900 = 19400$

$9925 = 19450$

$9950 = 19500$

$9975 = 19550$

$10000 = 19600$

$10025 = 19650$

$10050 = 19700$

$10075 = 19750$

$10100 = 19800$

$10125 = 19850$

$10150 = 19900$

$10175 = 19950$

$10200 = 20000$

$10225 = 20050$

$10250 = 20100$

$10275 = 20150$

$10300 = 20200$

$10325 = 20250$

$10350 = 20300$

$10375 = 20350$

$10400 = 20400$

$10425 = 20450$

$10450 = 20500$

$10475 = 20550$

$10500 = 20600$

$10525 = 20650$

$10550 = 20700$

$10575 = 20750$

$10600 = 20800$

$10625 = 20850$

$10650 = 20900$

$10675 = 20950$

$10700 = 21000$

$10725 = 21050$

$10750 = 21100$

$10775 = 21150$

$10800 = 21200$

$10825 = 21250$

$10850 = 21300$

$10875 = 21350$

$10900 = 21400$

$10925 = 21450$

$10950 = 21500$

$10975 = 21550$

$11000 = 21600$

$11025 = 21650$

$11050 = 21700$

$11075 = 21750$

$11100 = 21800$

$11125 = 21850$

$11150 = 21900$

$11175 = 21950$

$11200 = 22000$

$11225 = 22050$

$11250 = 22100$

$11275 = 22150$

$11300 = 22200$

$11325 = 22250$

$11350 = 22300$

$11375 = 22350$

$11400 = 22400$

$11425 = 22450$

$11450 = 22500$

$11475 = 22550$

$11500 = 22600$

$11525 = 22650$

$11550 = 22700$

$11575 = 22750$

$11600 = 22800$

$11625 = 22850$

$11650 = 22900$

$11675 = 22950$

$11700 = 23000$

$11725 = 23050$

$11750 = 23100$

$11775 = 23150$

$11800 = 23200$

$11825 = 23250$

$11850 = 23300$

$11875 = 23350$

$11900 = 23400$

$11925 = 23450$

$11950 = 23500$

$11975 = 23550$

$12000 = 23600$

$12025 = 23650$

$12050 = 23700$

$12075 = 23750$

$12100 = 23800$

$12125 = 23850$

$12150 = 23900$

$12175 = 23950$

$12200 = 24000$

$12225 = 24050$

$12250 = 24100$

$12275 = 24150$

$12300 = 24200$

$12325 = 24250$

$12350 = 24300$

$12375 = 24350$

$12400 = 24400$

$12425 = 24450$

$12450 = 24500$

$12475 = 24550$

$12500 = 24600$

$12525 = 24650$

$12550 = 24700$

$12575 = 24750$

$12600 = 24800$

$12625 = 24850$

$12650 = 24900$

$12675 = 24950$

$12700 = 25000$

$12725 = 25050$

$12750 = 25100$

$12775 = 25150$

$12800 = 25200$

$12825 = 25250$

$12850 = 25300$

$12875 = 25350$

$12900 = 25400$

$12925 = 25450$

$12950 = 25500$

$12975 = 25550$

$13000 = 25600$

$13025 = 25650$

$13050 = 25700$

$13075 = 25750$

$13100 = 25800$

$13125 = 25850$

$13150 = 25900$

$13175 = 25950$

$13200 = 26000$

$13225 = 26050$

$13250 = 26100$

$13275 = 26150$

$13300 = 26200$

$13325 = 26250$

$13350 = 26300$

$13375 = 26350$

$13400 = 26400$

$13425 = 26450$

$13450 = 26500$

$13475 = 26550$

$13500 = 26600$

$13525 = 26650$

$13550 = 26700$

$13575 = 26750$

$13600 = 26800$

$13625 = 26850$

$13650 = 26900$

$13675 = 26950$

$13700 = 27000$

$13725 = 27050$

$13750 = 27100$

$13775 = 27150$

$13800 = 27200$

$13825 = 27250$

$13850 = 27300$

$13875 = 27350$

$13900 = 27400$

$13925 = 27450$

$13950 = 27500$

$13975 = 27550$

$14000 = 27600$

$14025 = 27650$

$14050 = 27700$

$14075 = 27750$

$14100 = 27800$

$14125 = 27850$

$14150 = 27900$

$14175 = 27950$

$14200 = 28000$

$14225 = 28050$

$14250 = 28100$

$14275 = 28150$

$14300 = 28200$

$14325 = 28250$

$14350 = 28300$

$14375 = 28350$

$14400 = 28400$

$14425 = 28450$

$14450 = 28500$

$14475 = 28550$

$14500 = 28600$

$14525 = 28650$

$14550 = 28700$

$14575 = 28750$

$14600 = 28800$

$14625 = 28850$

$14650 = 28900$

$14675 = 28950$

$14700 = 29000$

$14725 = 29050$

$14750 = 29100$

$14775 = 29150$

$14800 = 29200$

$14825 = 29250$

$14850 = 29300$

$14875 = 29$

$$\begin{array}{r}
 222 \\
 \times 23 \\
 \hline
 666 \\
 4440 \\
 \hline
 5106
 \end{array}$$

$23 \times 6 = 138$
 $13 \times 6 = 78$
 $12 \times 6 = 72$
 $11 \times 6 = 66$
 $10 \times 6 = 60$
 $9 \times 6 = 54$
 $8 \times 6 = 48$
 $7 \times 6 = 42$
 $6 \times 6 = 36$
 $5 \times 6 = 30$
 $4 \times 6 = 24$
 $3 \times 6 = 18$
 $2 \times 6 = 12$
 $1 \times 6 = 6$
 $0 \times 6 = 0$

Que sea más el metro porque cuesta \$6
 y gasta menos durante la semana

$$\begin{array}{r}
 222 \\
 \times 23 \\
 \hline
 666 \\
 4440 \\
 \hline
 5106
 \end{array}$$

Yo le recomendaría que trate de hacer
 menos viajes si caminando, o trate de
 ir más en metro.
 M. Viajes en Metro
 A. Viajes en Autobus

2. 2500 de renta vagón en cada corte
 gasta 30 pesos de material y cobra
 cada corte en 150 pesos. ¿Cuántos cortes
 tiene que hacer a la semana para ganar
 dinero?

	2500	30 x 1 corte gasta	150 x 1 corte cobra
1	2500	30	150
2	5000	60	300
3	7500	90	450
4	10000	120	600
5	12500	150	750
6	15000	180	900
7	17500	210	1050

Evidencias de las etapas por equipo

26-02-2026
Act 2.2

Arriba de abrir el local y en servicios son 2500\$ y se gasta 30\$ por corte y cobrar el corte en 150\$ ¿Cuántos cortes tiene que hacer a la semana para ganar dinero?

P	C
150	1
300	2
450	3
600	4
750	5
900	6
1050	7
1200	8
1350	9
1500	10
1650	11
1800	12
1950	13
2100	14
2250	15
2400	16
2550	17
2700	18
2850	19
3000	20
3150	21

21 cortes tiene que hacer a la semana

Arriba de abrir el local y en servicios son 2500\$ y se gasta 30\$ por corte y cobrar el corte en 150\$ ¿Cuántos cortes tiene que hacer a la semana para ganar dinero?

P	C
150	1
300	2
450	3
600	4
750	5
900	6
1050	7
1200	8
1350	9
1500	10
1650	11
1800	12
1950	13
2100	14
2250	15
2400	16
2550	17
2700	18
2850	19
3000	20
3150	21

21 cortes tiene que hacer a la semana

2.2500 de renta y servicios
gasta 30 pesos de los materiales
cada corte en 150 pesos el corte
tiene que hacer a la semana para
ganar dinero?

P	C
150	1
300	2
450	3
600	4
750	5
900	6
1050	7
1200	8
1350	9
1500	10
1650	11
1800	12
1950	13
2100	14
2250	15
2400	16
2550	17
2700	18
2850	19
3000	20
3150	21

21 cortes tiene que hacer a la semana

26-02-2026

2.500 de renta y servicios
30 gasta en los materiales
150 cada corte

Cuántos cortes tiene que hacer a la semana para empezar a ganar dinero?

P	C
150	1
300	2
450	3
600	4
750	5
900	6
1050	7
1200	8
1350	9
1500	10
1650	11
1800	12
1950	13
2100	14
2250	15
2400	16
2550	17
2700	18
2850	19
3000	20
3150	21

21 cortes tiene que hacer a la semana

Anexo D

Evidencias de las etapas de debate



NÚMERO DE CORTES REALIZADOS	¿CUÁNTO DINERO COBRA?	¿CUÁNTO DINERO GASTA?	GANANCIA
15	2500	2500	0
16	2600	2600	0
17	2700	2700	0
18	2800	2800	0
19	2900	2900	0
20	3000	3000	0
21	3100	3100	0
22	3200	3200	0
23	3300	3300	0
24	3400	3400	0
25	3500	3500	0

NÚMERO DE CORTES REALIZADOS	¿CUÁNTO DINERO COBRA?	¿CUÁNTO DINERO GASTA?	GANANCIA
15	2500	2500	0
16	2600	2600	0
17	2700	2700	0
18	2800	2800	0
19	2900	2900	0
20	3000	3000	0
21	3100	3100	0
22	3200	3200	0
23	3300	3300	0
24	3400	3400	0
25	3500	3500	0

NÚMERO DE CORTES REALIZADOS	¿CUÁNTO DINERO COBRA?	¿CUÁNTO DINERO GASTA?	GANANCIA
15	2250	2950	-700
16	2400	2980	-580
17	2550	3010	-460
18	2700	3040	-340
19	2850	3070	-220
20	3000	3100	-100
21	3150	3130	20
22	3200	3160	140
23	3250	3190	260
24	3300	3220	380
25	3350	3250	500

Anexo E

Evidencias de las etapas de reflexión

08/10/26

Entendi como resolver la tabla, con operaciones, pero es más fácil haciendo una grafica en computadora y es un forma más fácil pero prefiero las operaciones por que no le entiendo mucho a la computadora. 😊

$$x + y = 23$$

$$13x + 6y = 222$$

Se cruzan las dos líneas de $x + y$ y $13x + 6y$, despues se cortan y muestra que hizo x en camión y y en metro.

$$\begin{array}{r} 13x + 6y = 222 \\ x + y = 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13x + 6y = 222 \\ - (x + y = 23) \\ \hline 12x + 5y = 199 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12x + 5y = 199 \\ - (12x + 12y = 276) \\ \hline -7y = -77 \\ y = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 23 \\ - (x + 11 = 23) \\ \hline -y = -12 \\ y = 12 \end{array}$$

donde se cruzan las dos líneas hay esta la solución

Metro = 11
Bus = 12

5-03-9

La solución en una grafica es ir trazando en una grafica ir trazando los cortes que ase una grafica asta lleguro a un punto para que diga cuantos cortes aser y esto es mas facil-

$$x + y = 23$$

$$13x + 6y = 23$$

Se cruzan dos lineas de 11 y 12 se cruzan y se cortan entonces siega de ~~11~~ y ay llegan a los 23 viajes

Un corte equivale a 1508 y se representa en la grafica

$x = 150x$

Un ejemplo es donde el valor de cada corte es 1508 y se representa

$$x = 30y + 25000$$

$$x + y = 23$$

5/3/26

Una forma mas de hacerlo es con la grafica y con la tecnología mucho mas

$$x + y = 23$$

$$13x + 6y = 23$$

Punto A (3, 20)

Donde se cortan las dos rectas ahí esta la solución.

Cual seria el resultado si ahora en la semana Realizo 26 viajes y gasto 2333

AIM

$\begin{array}{r} 142 \\ + 90 \\ \hline 232 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ \times 13 \\ \hline 113 \\ + 110 \\ \hline 143 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \times \frac{2}{13} \\ \frac{12}{36} \times \frac{2}{13} \\ \frac{12}{36} \times \frac{2}{13} \\ \frac{12}{36} \times \frac{2}{13} \\ \frac{12}{36} \times \frac{2}{13} \\ \hline \frac{12}{36} \times \frac{2}{13} \end{array}$	$\begin{array}{r} 13 \times \frac{1}{13} \\ \frac{13}{13} \times \frac{1}{13} \\ \frac{13}{13} \times \frac{1}{13} \\ \frac{13}{13} \times \frac{1}{13} \\ \frac{13}{13} \times \frac{1}{13} \\ \hline \frac{13}{13} \times \frac{1}{13} \end{array}$
--	---	---	---

Examen postest

Nombre:

Fecha:

Grado y grupo:

1. Representa en una operación de matemática, que Juan es dueño de una tienda donde venden refrescos y jugos; donde al comprar un refresco y un jugo cuesta \$33, y si compras dos jugos son \$30

2. Para resolver 4^x se multiplica 4×3 .

a) Verdadero b) Falso

3. ¿Cuál es el 25% de 300?

a) 75 c) 300

b) 57 d) 25

4. Relaciona las operaciones con la respuesta correcta.

- $-3-6=$ 20
- $5(-4)=$ -9
- $5(4)=$ 42
- $-13+15=$ -20
- $(-6)(-7)=$ 2

5. De las siguientes ideas. ¿Cuál define mejor a una ecuación?

- Es un conjunto de letras y números.
- Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.
- Es una expresión que tiene un exponente.

6. Elige la opción que es un ejemplo de ecuación lineal

a) $2x^2+3x-35=0$ c) $2x+5=27$

b) $x^2+3x^2=100$

7. Al pensar en un número, le sume 15 y obtuve como resultado 27. ¿Cuál es el número que se pensó?

a) 15 c) 12

b) 27 d) 42

8. El perímetro de un pentágono es de 80 cm. ¿Cuánto mide cada uno de sus lados?



- a) 10cm
- b) 16cm
- c) 8cm
- d) 5cm

9. La encargada de una cafetería quiere vender fruta esta semana, y ha comprado de dos tipos. Su hija le pregunta: ¿mamá cuántas manzanas Y cuántas naranjas compraste? -. La madre le dice: -te voy a dar dos pistas para que encuentres cuántas manzanas y cuántas naranjas compré.

Primera pista: en total compré 68 frutas. Segunda pista: el número de naranjas es el triple que el número de manzanas. ¿Cuántas frutas compré de cada tipo?

a) 51 manzanas y 18 naranjas c) 13 naranjas y 20 manzanas

b) 51 naranjas y 17 manzanas d) 30 manzanas y 38 naranjas

10. Ordena las ecuaciones en la forma $ax+by=c$

• $2y=25-3x$

• $3y-121=-2x$

a) $3x-2y=25$ $2x+3y=121$

b) $2x+3y=121$ $2x+3y=121$

c) $3x+2y=25$ $2x+3y=121$

11. Encuentra las ecuaciones que representan la siguiente situación.

Un alumno pagó \$30 por un sándwich y un café en la cafetería de la escuela. Hallar el precio de cada producto si el sándwich vale el doble que el café.

a) E1. $s+c=30$ E2. $s=2c$ c) E1. $s+c=30$ E2. $s=c$

b) E1. $s+2c=30$ E2. $s=2c$

12. Encuentra las dos ecuaciones del siguiente problema.

La edad de Antonio y Luis suman 34 años, y tres veces la edad de Antonio menos la edad de Luis es 22.

a) E1. $A+L=34$ E2. $A-L=22$ c) E1. $3A+L=34$ E2. $A+L=22$

b) E1. $A+L=34$ E2. $3A-L=22$

13. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

• E1. $5x+3y=370$

• E2. $3x+3y=270$

a) $x=120$ $y=150$ c) $x=50$ $y=40$

b) $x=30$ $y=60$

14. Observa la gráfica donde se representan las ecuaciones:

• $y=x-1$

• $y=-x+5$

Determina los valores en (x) y en (y)

