BENEMÉRITA Y CENTENARIA ESCUELA NORMAL DEL ESTADO DE SAN LUIS POTOSÍ

TITULO: Tratado elemental de álgebra : arreglado para los colegios hispanoamericanos

AUTOR: Rafael Celedón

FECHA: 1895

PALABRAS CLAVE: Algebra-Estudio y enseñanza,Problemas y ejercicios

Tratad... Ele...

ALGE...

arreglado ...
...para...

RAFAEL ...

NUEVA YORK
D. APPLETON Y COMPAÑIA
... AVENUE, ...

Escuela Normal Mixta San Luis Potosí

Leonor Lee

33

Leonor Lee

TRATADO ELEMENTAL

DE

ÁLGEBRA

Dolores Reyes.

ARREGLADO PARA
LOS COLEGIOS HISPANO-AMERICANOS

POR

RAFAEL CELEDÓN, Presb.,
EX-RECTOR DEL SEMINARIO DE SANTA MARTA

SEGUNDA EDICIÓN CORREGIDA

NUEVA YORK
D. APPLETON Y COMPAÑÍA
5TH AVENUE No 72
1895

PREFACIO.

Amantes de la educación de la juventud, y sobre todo, de la juventud hispano-americana, á quien nos une el doble vínculo de lengua, y raza, hemos querido ofrecerle nuestro óbolo en este pequeño tratado de Álgebra que afectuosamente le dedicamos.

Ni tan extenso que casi agote la materia y sea difícil adquirirlo por lo crecido de su precio; ni tan conciso que deje por alto puntos importantes, ó sin el desenvolvimiento indispensable para la fácil comprensión, este Compendio, si no nos engañamos, evita ambos inconvenientes; por lo menos tal ha sido nuestro intento al ordenarlo. Y decimos ordenarlo, porque no hemos hecho sino escojer y ordenar lo que nos ha parecido más adecuado en los Tratados de Álgebra de Pelegrín, Puissant, Liévano, Davies y Robinson.

Penetrados de la conveniencia de hacer fecunda la verdad teórica con su aplicación á la práctica, hemos ilustrado casi cada demostración con numerosos ejemplos y problemas, trazando á veces el procedimiento que debe emplearse para obtener el resultado, ó dando éste y dejando al estudiante la labor de investigarlo.

Si, como lo esperamos, tuviere este Compendio acogida favorable y contribuyere á facilitar el cultivo intelectual de la juventud á quien lo hemos dedicado, habrémos realizado nuestro deseo.

RAFAEL CELEDÓN, *Presb.*

NUEVA YORK, *mayo de 1885.*

ALGEBRA ELEMENTAL.

SECCIÓN I.

DEFINICIONES Y NOTACIÓN.

1. *El Algebra* es una especie de Aritmética Universal en que se representan con letras las cantidades.

2. *Cantidad* es todo lo que es susceptible de aumento ó diminución.

3. Divídese con respecto á su
   - *naturaleza*, en
     - *Discreta* ó *Numérica:* 8, 6, 10.
     - *Continua* ó *Extensiva:* — lo largo de un camino.
     - *Intensiva:* el calor, la luz, el dolor.
   - *valor*, en
     - *Positiva*, que es la mayor que cero: $+8$.
     - *Negativa*, que es la menor que cero: -8.

4. La *cantidad negativa* se origina de una sustracción en que el sustraendo es mayor que el minuendo: $2-8=-6$.

5. Para formarnos una idea de la cantidad negativa, supongamos que tenemos 2 pesos y debemos 8; si paga-

mos los 2, quedan por pagar 6 : tenemos, pues, *menos* 6 pesos.

6. En el Algebra se calcula la cantidad *discreta*, tanto *positiva* como *negativa ;* y esto último es una de las ventajas del Algebra sobre la Aritmética, pues en ésta no se considera tal clase de cantidad.

7. Las cantidades se representan con letras.

8. *Término algébrico* ó *algebraico*, es una ó más letras y números agrupados sin que los separe el signo + ó —. Así, $4a^2b^3$ es un solo término ; mientras que $a+b$ son dos, y $a+b-c$ son tres.

8. Todo *término àlgébrico* consta de cuatro elementos, que son : *Signo, Coeficiente, Letras y Exponente.*

SIGNOS.

9. *Signos*, son ciertos símbolos ó figuras que acompañan á los términos algébricos como se ve en los ejemplos : $+a$; $ab=d$; $a+b+c\times d$; $(a+b+c)\div d$; $a>b$.

10. Los *Signos* son de tres clases : de *Operación*, de *Relación*, de *Abreviación.*

SIGNO.	SE LEE.	INDICA.
De Operación.		
$+$	*más*	Adición : $2a+a=3a$.
$-$	*menos*	Sustracción : $2a-a=a$.
$\pm$	*más menos*	Adición ó sustracción : $2a\pm b$.
$\times$, ó $\cdot$	*por*	Multiplicación : $a\times b$; $a\cdot b$; ab.
$\div$, ó $\underline{\vert\,'}$	*entre*	División : $a\div b$; $a\,\underline{\vert\, b}$.
$(\ )^m$	*elevado á*	Elevación á la potencia determinada por m : $(a^2b^3)^2$.
$\sqrt{\ }$	*radical*	Extracción de raíz : $\sqrt{a^4b^2}$.
De Relación.		
$>$	*mayor que*	Que es mayor la cantidad que está en la abertura : $2a>a$.
$<$	*menor que*	Que es menor la cantidad del vértice : $a<2a$.
$=$	*igual*	Que las cantidades de sus extremos son iguales : $2a=b$.
:	*es á*	La razón geométrica : a : b.
::	*como*	La proporción geométrica : a : b :: c : d.

SIGNO.	SE LEE.	INDICA.
De Abreviación.		
$\therefore$	*luego*	La consecuencia que se saca.
$\because$	*porque*	La causa ó razón.
( ) [ ]	*paréntesis*	Que las cantidades que encierran ó afectan están sometidas á una misma operación, como por ejemplo : $(a+b+c)d$, $[a+b+c]d$, $\overline{a+b+c}\times d$, ó $\begin{array}{r\|l} a & \\ +b & d \\ +c & \end{array}$ d, que indican la multiplicación de a, b y c por d.
{ }	*llave*	
$\overline{\quad}$	*vínculo*	
|	*barra*	

11. Si el primer término de una expresión debe llevar signo +, no se escribe dicho signo, porque se sobrentiende.

COEFICIENTES.

12. *Coeficiente* es un número que se pone antes de las letras, é indica las veces que éstas han de sumarse consigo mismas ; ó lo que es lo mismo, que han de multiplicarse por el coeficiente como factor.

$$\text{Así}\left\{\begin{array}{l} 4a \text{ equivale á } a+a+a+a, \\ \quad y \\ a+a+a+a \text{ se reducen á } 4a. \end{array}\right.$$

13. Nunca va el coeficiente entre las letras de un término ; así es que si se encuentra escrito *a* 4 *bc*, se cambiará en 4 *abc ;* y 2 *a* 4 *bc*, en 8 *abc*, multiplicando los dos coeficientes.

14. He aquí las operaciones que se ejecutan con los coeficientes :

En
- sumar y restar, se suman y restan, si los términos son semejantes : $2a+3a=5a$; $3a-2a=a$.
- multiplicar, se multiplican : $3ab\times 2ab=6a^2b^2$.
- dividir, se dividen : $4a^2 : 2a=2a$.
- la elevación á potencia, se elevan á potencia : $(3a^3)^2=9a^6$.
- la extracción de raíz, se extrae la raíz : $\sqrt{9a^6}=3a^3$.

De manera que con los coeficientes se efectúan las operaciones indicadas por los signos, menos en sumar y restar, cuando los términos son desemejantes; pues entonces se dejan intactos.

15. Cuando un término ha de tener 1 por coeficiente, no se expresa: $1a$ se escribirá a, de modo que á un término sin coeficiente se le supone por coeficiente la unidad: a debe considerarse como si fuera $1a$.

LETRAS.

16. Cada letra del alfabeto puede servir para representar cualquier cantidad, así es que a, por ejemplo, puede representar á 8, 10, 100, 1,000, etc. Pero una vez que en una operación se ha asignado valor á una letra, debe conservársele en toda aquella operación.

17. Represéntanse las cantidades conocidas, con las primeras letras, a, b, c, d, etc., del alfabeto; y las desconocidas ó *incógnitas*, con las últimas, x, y, z. *Cantidades conocidas* son las que se han dado; y *desconocidas ó incógnitas*, las que se buscan.

18. Las cantidades conocidas que tienen alguna relación, en una serie de cantidades, se representan algunas veces por una sola letra con comas, así: a', a'', a''', leyéndose *a prima*, *a segunda*, etc.; y también poniéndoles un número debajo, así: a_1 a_2 a_3 y se leen *a bajo* 1; *a bajo* 2, etc. También es conveniente, en ciertas investigaciones, representar las cantidades con la letra inicial de sus nombres. Así, *S* ó *s* representan *suma*; *D* ó *d*, *diferencia* ó *diámetro*; *R* ó *r*, *residuo*, *razón* ó *radio*.

19. Las *incógnitas*, cuyo valor ya es conocido, suelen representarse con las mismas letras que venían representándolas, pero con comas, así: x', y', z'.

20. Las letras colocadas unas á continuación de otras, indican que están multiplicadas, y se escriben en orden alfabético; así es que $4abc$ equivale á $4\times a\times b\times c$.

EXPONENTES.

21. *Exponente* es un número que se pone después de la letra, y un poco arriba, para indicar las veces que la letra entra como factor. Así es que a^4 equivale á $a\times a\times a\times a$; y $a\times a\times a\times a$ es igual á a^4.

22. He aquí las operaciones que se efectúan con los exponentes:

En:
- sumar y restar, se dejan intactos: $2a^2+3a^2=5a^2$; $4a^2-2a^2=2a^2$.
- multiplicar, se suman: $4a^3\times 2a^5=8a^8$ } en letras iguales.
- dividir, se restan: $4a^4 : 2a^2=2a^2$ } en letras iguales.
- elevación á potencia, se multiplican: $(4a^3b^4)^2=16a^6b^8$.
- extracción de raíces, se dividen: $\sqrt{16a^6b^8}=4a^3b^4$.

23. Cuando una letra tiene 1 por exponente, no se escribe, así es que a^1 se escribe a; de manera que á una letra sin exponente, se le supone la unidad como tal; así a es a^1.

24. En un término algébrico llamaremos

Parte:
- *Númerica*, á los signos y coeficientes: en $4a^3b^3$, la parte númerica es $+4$.
- *Literal*, á las letras y exponentes: en $4a^3b^3$, la parte literal es: a^3b^3.

25. Los términos algébricos se dividen

Según:
- su valor, en
  - *Positivos*, que representan un valor mayor que cero: $8a$,
  - y
  - *Negativos*, que representan un valor menor que cero: $-8a$.
- su forma, en
  - *Semejantes*, que tienen igual la parte literal, aunque desigual la numérica,
  - y
  - *Desemejantes*, que tienen desigual la parte literal, aunque igual la numérica.

Son:
- *Semejantes* $3a^4b^2$ y $-4a^4b^2$, porque tienen igual la parte literal.
- *Desemejantes* $3a^4b^2$ y $3a^2b^3$, porque tienen desigual la parte literal.

26. *Dimensión* de un término, es el número de factores literales que hay en él.

27. Las dimensiones se obtienen:

en un entero, sumando todos los exponentes de las letras: $4a^3b^2c^5$, tiene 10 dimensiones,

en un quebrado, restando la suma de exponentes del numerador, de los del denominador: $\frac{4a^2b^3}{5ab^2}$=es de 2 dimensiones.

28. Con respecto á la *dimensión* se dividen los términos en *homogéneos* y *heterogéneos*: homogéneos son los que tienen igual dimensión, como a^3b^2 y $c^2d^1e^2$; y heterogéneos, los que tienen diferente dimensión, como $a^2b^3c^4$ y a^2b^3c.

29. *Expresión algébrica* es uno ó más términos en que hay una ó más letras.

30. La expresión algébrica

$$\text{se llama}\left\{\begin{array}{l}\textit{Monomio}\\ \textit{Binomio}\\ \textit{Polinomio}\end{array}\right\}\text{si consta de}\left\{\begin{array}{l}\text{un término: } a.\\ \text{dos términos: } a+b;\ c-d.\\ \text{más de dos términos: } a+b+c.\end{array}\right.$$

31. *Valor absoluto* de una cantidad, es la misma cantidad tomada independientemente del signo que le precede. Así, el *valor absoluto* de $+4$ es 4, y el de -5 es 5.

$$\text{32. Toda cantidad}\left\{\begin{array}{l}\textit{Positiva}\text{ es igual á su valor absoluto.}\\ \textit{Negativa}\text{ es menor que cero, y será tanto menor, cuanto sea mayor su valor absoluto.}\end{array}\right.$$

De modo que $2a>a>0>-a>-2a$; y $10>5>0>-5>-10$.

33. *Fórmula* es la expresión algébrica de un principio general que sirve para resolver con prontitud alguna operación.

34. *Ordenación*, es la operación de colocar los términos de un polinomio de modo que los exponentes de una letra vayan creciendo ó decreciendo ordenadamente.

$4a^6b+3a^4c+2a^3d+a^2e+4am$, están colocados en orden decreciente ó descendente; y $4am+a^2c+2a^3d+3a^4c+4a^6b$, en orden creciente ó ascendente.

AXIOMAS.

35. *Axioma* es una verdad evidente por sí misma que no necesita demostración. Los siguientes axiomas son los principales en las operaciones algébricas:

1. Si una misma cantidad ó cantidades iguales se agregan á cantidades iguales, las sumas son iguales.
2. Si una misma cantidad ó cantidades iguales se restan de cantidades iguales, los residuos serán iguales.
3. Si cantidades iguales se multiplican por una misma cantidad ó por cantidades iguales, los productos serán iguales.
4. Si cantidades iguales se dividen por una misma cantidad ó por cantidades iguales, los cocientes serán iguales.
5. Si á una cantidad se le agrega y quita á la vez otra cantidad, no cambia de valor.
6. Si una cantidad se multiplica y divide á la vez por otra, no cambia de valor.
7. Dos cantidades iguales á una tercera, son iguales entre sí.
8. Las potencias de un mismo grado de cantidades iguales, son iguales.
9. Las raíces de un mismo grado de cantidades iguales, son iguales.
10. El todo de una cantidad es mayor que cualquiera de sus partes.
11. El todo de una cantidad es igual á la suma de sus partes.

Ejercicios de Notación Algébrica.

36. Exprese el alumno en lenguaje algébrico los siguientes ejemplos:

1. El cubo de *a* aumentado de seis veces *b*. Resp.: a^3+6b.

2. Ocho veces el producto de c y d, disminuido de seis veces el cuadrado de g. Resp.: $8cd-6g^2$.
3. Diez veces el cubo de a, menos cinco veces el cuadrado de b.
4. Una arboleda que tiene b árboles en cada hilera, y c hileras.
5. El cuadrado de a dividido por c y multiplicado por d.
6. Tres veces el cuadrado de a menos d multiplicado por c, igual á m.

Computación del valor numérico.

37. *Valor numérico* de una cantidad algébrica es el número que se obtiene al asignar valores á las letras, y hacer las operaciones indicadas por los signos.

Siendo $a=5$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $m=6$, $n=10$, hallar los valores de las siguientes expresiones:

OPERACIÓN.

1. $(a^2-bc)d=(5\times5-2\times3)\times4=(25-6)\times4=19\times4=76.$
2. $a^2-bc=19.$
3. $(a+bd)c=39.$
4. $am+d^2-bc^2=28.$
5. $(a+b)c-(m-d)n=1.$
6. $(a^2-c)(d-b)n=440.$
7. $\dfrac{(a+c)}{b}(m-d)=8.$
8. $\dfrac{2b^2+d^2}{a+c}=3.$
9. $\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{n^2-m^2}=\dfrac{27}{32}.$

ADICIÓN.

38. *Adición* es la operación de reunir dos ó más cantidades en una equivalente que se llama *Suma*.

39. La palabra *adición* tiene en Álgebra un sentido más general que en Aritmética, porque las cantidades que han de sumarse pueden ser positivas ó negativas.

40. La *Suma Aritmética* de dos ó más cantidades es la suma de sus valores absolutos, y hace relación simplemente al número de unidades que las cantidades representan; mientras que la *Suma Algébrica* de dos ó más cantidades es una cantidad que, tomada con relación á su signo, es equivalente á las cantidades dadas, tomadas cada una con relación á su signo particular.

41. Para formar reglas sobre la adición, examinaremos cuatro ejemplos en que aparezcan cantidades positivas y negativas.

1°. Súmense 2a, 4a y 5a.

Puesto que en estas cantidades, a está tomada positivamente, 2, 4 y 5 veces, ó lo que es lo mismo, 11 veces; la suma algébrica será $+11a$, ó suprimiendo el signo: $11a$; esto es, $2a+4a+5a=11a$.

2°. Súmense $-2a, -4a, -5a$.

Estando tomada negativamente la cantidad a, 2, 4 y 5 veces, ó lo que es lo mismo 11 veces, la suma algébrica será $-11a$; esto es $-2a-4a-5=-11a$.

De aquí,

Regla I.—*La suma algébrica de dos ó más términos semejantes que tienen signos iguales, es la suma de sus valores absolutos tomada con el signo común.*

3°. Súmense 6b y $-4b$.

Del axioma 11° tenemos

$$6b=4b+2b.$$

La suma de 6b y $-4b$ es por tanto la misma que la de 4b, 2b y $-4b$. Puesto que 4b y $-4b$, tienen igual valor absoluto, pero uno positivo y otro negativo, se destruyen, y quedan reducidos á nada, ó á cero. Esto es

$$6b+(-4b)=2b+4b-4b=2b.$$

4°. Súmense $-6b+2b$.

Del axioma 11° tenemos

$$-6b=-2b-4b.$$

La suma de $-6b$ y 2b es por tanto la misma que la de

$-2b-4b$ y $2b$. Pero $2b-2b$, se reducen á nada, ó á cero según lo dicho antes, luego

$$-6b+2b=-4b-2b+2b=-4b.$$

De aquí,

Regla II.—*La suma algébrica de dos términos semejantes y signos contrarios, es la diferencia de sus valores absolutos tomada con el signo del que tenga mayor coeficiente.*

42. Cuando hay que sumar varios términos positivos y negativos, se pueden seguir dos procedimientos:

1°. Sumar todos los positivos semejantes, luego los negativos, y después restar de una suma la otra; y el residuo, con el signo del mayor coeficiente, será la suma. Ej.: $4a+2a-3a+5a-6a=11a-9a=2a$.

2°. Sumar ó restar al paso, los positivos ó negativos, teniendo cuidado de llevar en la memoria la suma ó diferencia con su respectivo signo, para seguir sumando ó restando según convenga. Ej.: $4a+2a-3a+5a-6a$. Dígase: $4a+2a$ son $6a$: menos $3a$, son $+3a$, mas $5a$, son $8a$, menos $6a$, son $+2a$.

43. Los términos desemejantes no pueden reducirse á un solo término por medio de la adición, porque no son cantidades de una misma especie. Así es que la adición queda solo indicada, así:

$a+b-c$; pero no importa el orden de colocación; de modo que puede escribirse $b+a-c$; ó $-c+b+a$; y siempre se representa la suma de a, b y $-c$.

44. La Adición se plantea de dos modos: ó poniendo los términos unos á continuación de otros, como en los ejemplos anteriores, ó colocándolos en columnas verticalmente de modo que los semejantes, de iguales ó de diferentes signos, vayan unos debajo de otros:

EJEMPLOS.

$$\begin{array}{cccc}
1. & 2. & 3. & 4. \\
2ab & -6a^2b & +\ a^3cx & -7x^2yz \\
3ab & -4a^2b & -4a^3cx & +4x^2yz \\
ab & -\ a^2b & +2a^3cx & +2x^2yz \\
5ab & -7a^2b & +6a^3cx & -\ x^2yz \\
\hline
11ab & -18a^2b & +5a^3cx & -2x^2yz
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
5. & 6. & 7. \\
4a^2b-3yz & -4a^3b+m & 2ab-2\sqrt{d} \\
a^2b+4yz & +2a^3b+3m & 3ab+3\sqrt{d} \\
5a^2b-yz & -5a^3b-6m & -\ ab-4\sqrt{d} \\
3a^2b+5yz & +3a^3b+m & +4ab+1\sqrt{d} \\
\hline
13a^2b+5yz & -4a^3b-m & +8ab-2\sqrt{d}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
8. & 9. \\
4(a-2b)-\ n+2 & 4(a-b^3)+2\sqrt{a-c}+4 \\
6(a-2b)-3n-6 & 3(a-b^3)+4\sqrt{a-c}-8 \\
-2(a-2b)+5n+4 & -2(a-b^3)-8\sqrt{a-c}+3 \\
+3(a-2b)-2n-7 & -3(a-b^3)-3\sqrt{a-c}+1 \\
\hline
11(a-2b)-\ n-7 & 2(a-b^3)-5\sqrt{a-c}+0
\end{array}$$

10. Súmese: $4ax$, $5ax$, $-3ax$, $2ax$ y $-10ax$. Resp.: $-2ax$.

11. Súmese: $2abcd^2$, $-3abcd^2$, $4abcd^2$ y $-2abcd^2$. Resp.: $abcd^2$.

12. Súmese: $5a+3\sqrt{m^2-1}+4$, $7a-\sqrt{m^2-1}-5$, $3a-5\sqrt{m^2-1}-8$, y $2a+2\sqrt{m^2-1}+2$. Resp.: $17a-\sqrt{m^2-1}-7$.

45. Llámase *unidad de adición*, la letra ó cantidad cuyos coeficientes han de sumarse para hallar la suma de dos ó mas cantidades. En $3a+2a+4a=9a$, la *a* es la unidad de adición. Y en $5\sqrt{a+b}+4\sqrt{a+b}-4\sqrt{a+b}=5\sqrt{a+b}$, la unidad de adición es $\sqrt{a+b}$.

46. Cuando términos desemejantes tienen común una

parte literal, ésta puede tomarse como unidad de adición. La suma de los términos quedará representada con encerrar la suma de los coeficientes en un paréntesis, poniendo fuera, y en seguida, la unidad de adición.

EJEMPLOS.

1.	2.	3.
ax^2	$6axy^2$	$(5a-b)\sqrt{z}$
bx^2	$-4axy^2$	$(4c-2a)\sqrt{z}$
$-cx^2$	$2bxy^2$	$(b-c)\sqrt{z}$
$(a+b-c)x^2$	$(2a+2b)xy^2$	$(3a+3c)\sqrt{z}$

4.	5.
$a(y^2-z^3)$	$(a^2-4b)\ (n^3-1)$
$b(y^2-z^3)$	$(b^3-4a)\ (n^3-1)$
$-c(y^2-z^3)$	$(4a+4b)\ (n^3-1)$
$(a+b-c)\ (y^2-z^3)$	$(a^2+b^3)\ (n^3-1)$

6. Súmese: ax, $2cx$ y $4dx$. Resp.: $(a+2c+4d)x$.
7. Súmese: $ay+cx$, $3ay+2cx$ y $4y+6x$. Resp.: $(4a+4)$ y $+(3c+6)x$.
8. $3x+2xy$, $bx+cxy$, y $(a+b)x+2cdxy$. Resp.: $(a+2b+3)x+(2cd+c+2)xy$.
9. $bz+7x$, $7bz-3x$, y $-2z+4x$. Resp.: $(8b-2)z+8x$.
10. $(c-d)\sqrt{z}$, y $(b+2d-c)\sqrt{z}$. Resp.: $(b+d)\sqrt{z}$.
11. $ab+c+d+b+ac+d+b+c+ad$. Resp.: $(a+2)(b+c+d)$.
12. $bc+d+e+x+y+bd+e+x+y+be+bx+c+by+d+c$. Resp.: $(b+2)\ (c+d+e+x+y)$.

SUSTRACCIÓN.

47. *Sustracción* es la operación por la cual se busca la diferencia entre dos cantidades.

48. Llámase *Minuendo* la cantidad de la cual se ha

de restar; *Substraendo* la que se ha de restar, y *Resta, Residuo ó Diferencia*, el resultado.

49. *Planteo.* Se plantea de dos modos: ó poniendo el Minuendo á la izquierda y el Substraendo á la derecha separados por el signo $-$; ó el Minuendo arriba y el Substraendo debajo, precedido del signo $-$, y puesto entre un paréntesis.

1.	2.
$4a^2b-(+2a^2b)$	$\begin{array}{r} 4a^2b \\ -(+2a^2b) \\ \hline \end{array}$

50. *Resolución.* Se efectúa cambiando los signos de los términos del Substraendo de modo que $+$ se vuelva $-$, y $-$ se vuelva $+$, y luego se suman ó restan los coeficientes de los términos semejantes, dejando intactos los desemejantes, que no pueden restarse porque no son de una misma especie.

1.	2.
$6a-(+4a)=6a-4a=2a$	$4a-(+2b)=4a-2b$

De aquí, que en Algebra la Sustracción es equivalente á la Adición, pero cambiados los Signos del Substraendo.

Razón del cambio de Signos.

51. El cambio de Signos del Substraendo se demuestra de dos modos, basándose en dos principios demostrados en la Aritmética y son:

1°. Que la suma del substraendo y el residuo, es igual al minuendo.

2°. Que el residuo está en *razón directa* con el minuendo, y en *razón inversa* con el substraendo.

52. *Demostración por el 1^r^ principio, con Residuo indicado.*

Sean los cuatro casos posibles:

	Minuendo. Subst.	Planteo cambiado signo: Residuo indicado.	Suma de Residuo y Substr.	Minuendo
1°.	$a-(+b)$	$a-b$	$a-b+b=$	a
2°.	$a-(-b)$	$a+b$	$a+b-b=$	a
3°.	$-a-(+b)$	$-a-b$	$-a-b+b=$	$-a$
4°.	$-a-(-b)$	$-a+b$	$-a+b-b=$	$-a$

Se obtiene el verdadero resultado cambiando el signo al substraendo, luego debe cambiarse. Si se cambia el signo al minuendo no se obtiene el verdadero resultado.

	M.	S.	Planteo y resid.	Resid. Subst. No es el minuendo.
1°.	$a-$	$(+b)$	$-a+b$	$-a+b+b=-a+2b$
2°.	$a-$	$(-b)$	$-a-b$	$-a-b-b=-a-2b$
3°.	$-a-$	$(+b)$	$+a+b$	$+a+b+b=+a+2b$
4°.	$-a-$	$(-b)$	$+a-b$	$+a-b-b=+a-2b$

Si no se cambian signos tampoco se obtiene el resultado verdadero.

M.	Subst.	Planteo.	Resid.	Suma de Res. y Subst. No es el minuendo.
$+a-$	$(+b)$	$+a+b$	$+a+b$	$+a+b+b=+a+2b$
$+a-$	$(-b)$	$+a-b$	$+a-b$	$+a-b-b=+a-2b$
$-a-$	$(+b)$	$-a+b$	$-a+b$	$-a+b+b=-a+2b$
$-a-$	$(-b)$	$-a-b$	$-a-b$	$-a-b-b=-a-2b$

53. *Demostración por el 2° principio con Residuo realizado.*

Sean los 4 casos posibles:

$$\begin{array}{ll} 1°. & 2a-(+a) \\ 2°. & 2a-(-a) \\ 3°. & -2a-(+a) \\ 4°. & -2a-(-a) \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\end{array}}\right\}\begin{array}{c}\text{el re-}\\ \text{siduo}\\ \text{debe}\\ \text{ser}\end{array}\left\{\begin{array}{r} +\ a \\ +3a \\ -3a \\ -\ a \end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{y para}\\ \text{ella es}\\ \text{pre-}\\ \text{ciso}\end{array}\left\{\begin{array}{r} +2a-a=\ +a \\ 2a+a=\ 3a \\ -2a-a=-3a \\ -2a+a=-\ a \end{array}\right.$$

1r *Caso.*—Si de $+2a$ quito $+a$ debe quedar $+a$; pero solo se consigue poniendo $-a$ como substraendo, es decir cambiando el signo, así $2a-a$; pues de no cambiarlo seria $2a+a=3a$ que no es el resultado verdadero.

2° *Caso.*—El minuendo es el del 1r caso $+2a$; pero el substraendo ha disminuido en el valor que hay de $+a$ que era, á $-a$, lo que equivale á $2a$ (porque de $+a$ á cero, va $1a$, y de cero á $-a$ va otra a); luego el $-a$ del substraendo debe volverse $+a$ para obtener $+3a$ que es el residuo $+a$ del 1r caso, aumentado de $+2a$ en que ha crecido el residuo por la disminución del substraendo.

3° *Caso.*—El substraendo es el del 1r caso; pero ha variado el minuendo, disminuyendo de $+2a$ que era, á $-2a$; el residuo debe disminuir tanto, cuanto ha disminuido el minuendo; este ha disminuido $4a$ (porque de $+2a$ á cero, van $2a$; y de cero á $-2a$ van $2a$, es decir, que son $4a$); luego el $+a$ del substraendo debe cambiarse en $-a$ para obtener $-3a$ de residuo, que será el del 1r caso $+a$, disminuido de $-4a$, que es lo que ha disminuido el minuendo.

4° *Caso.*—El minuendo es el del 3r caso, $-2a$; pero ha variado el substraendo disminuyendo de $+a$ que era en dicho caso, á $-a$; es decir, que ha disminuido $2a$ (porque de $+a$ á cero, va $1a$; y de cero á $-a$, va otra a·); luego el residuo debe aumentar en la misma cantidad con respecto el $-3a$ del 3r caso; pero para ello es preciso cambiar el substraendo $-a$ en $+a$, y se obtiene $-a$ que es mayor que $-3a$ en $2a$.

EJEMPLOS DE SUSTRACCIÓN.

1.	2.	3.	4.
$12a^2b$	$4mn^2$	$4a^2bc$	$-6a^4b^5$
$6a^2b$	$8mn^2$	$2a^2bc$	$-8a^4b^5$
$6a^2b$	$-4mn^2$	$2a^2bc$	$2a^4b^5$

5.	6.	7.
$4a+2x-3c$	$4ab+6y$	$6a^2b-4\sqrt{mn}-3x^2y$
$a+4x-6c$	$ab+3y$	$4a^2b-6\sqrt{mn}-5x^2y$
$3a-2x+3c$	$3ab+3y$	$2a^2b+2\sqrt{mn}+2x^2y$

8.	9.
$4a^2b^3c+\ c^2d+4c^3d$	$4a^3b^3+5c^2d^3+3m^3n^4$
$3a^2b^3c+4c^2d+3c^3d$	$6a^3b^3+6c^2d^3+8m^3n^4$
$a^2b^3c-3c^2d+\ c^3d$	$-2a^3b^3-\ c^2d^3-5m^3n^4$

10. De $a+b$ réstese $a-b$. Resp.: $2b$.
11. De $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$ réstese $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$. Resp.: y.
12. De $a+b+c$ réstese $-a-b-c$. Resp.: $2a+2b+2c$.

54. La diferencia de dos términos desemejantes puede expresarse por un solo término separando alguna ó algunas letras comunes como unidad de sustracción, y poniendo lo demás entre paréntesis.

1.	2.	3.
$2bc$	my^2z^3	$ax+by$
cm	$-4y^2z^3$	$cx-y$
$(2b-m)c$	$(m+4)y^2z^3$	$(a-c)x+(b+1)y$

Uso del Paréntesis.

55. Siempre que antes del paréntesis hay signo $+$, las cantidades encerradas en él han de sumarse, y por consiguiente no se hace cambio alguno de signos al quitarlo; pero cuando está afectado con el signo $-$, las cantidades encerradas en él han de restarse, y deben cambiarse los signos cuando se quita el paréntesis. De aquí:

1º. Puede quitarse un paréntesis afectado con el signo $+$, escribiendo con sus propios signos los términos que estaban dentro:

$$a+b+(-c+d)=a+b-c+d.$$

2º. Recíprocamente: Puede encerrarse cualquiera número de términos dentro de un paréntesis, poniendo delante el signo $+$.

$$a-b+c-d+e=a+(-b+c-d+e).$$

3º. Puede quitarse un paréntesis afectado con el signo $-$, pero cambiando los signos de los términos que están encerrados en él:

$$a-(b-c+d-e)=a-b+c-d+e.$$

4º. Recíprocamente: Puede encerrarse cualquier número de términos dentro de un parentésis afectado con el signo $-$; pero solo cambiando los signos de los términos al encerrarlos en él:

$$a-b+c-d+e=a-(+b-c+d-e).$$

56. Cuando se emplean dos ó más paréntesis en una expresión, pueden quitarse sucesivamente siguiendo las reglas anteriores.

$$a-\{b-c-(d-e)\}=a-\{b-c-d+e\}=a-b+c+d-e,$$

ó de otro modo:

$$a-\{b-c-(d-e)\}=a-b+c+(d-e)=a-b+c+d-e.$$

EJEMPLOS.

57. Quitar los paréntesis en las siguientes expresiones, y deducir los resultados.

1. $2a+(b-c+d-e)$. Resp.: $2a+b-c+d-e$.
2. $2a-b-(2c-4d+m)$. Resp.: $2a-b-2c+4d-m$.
3. $a+2c-(4c-3a+2m^2)$. Resp.: $4a-2c-2m^2$.
4. $a+2m-\{c+x-[a-m-(c-2x)]\}$. Resp.: $2a+m-2c+x$.

MULTIPLICACIÓN.

58. Multiplicación es la operación de repetir una cantidad las veces que expresa otra.

59. Llámase *Multiplicando*, la cantidad que se ha de repetir; *Multiplicador*, la que expresa las veces que se ha de repetir el multiplicando, y *Producto* el resultado de la operación.

60. *Planteo.* Se hace de dos modos: ó poniendo el multiplicando á la izquierda y el multiplicador á la derecha, separados por el signo $\times$ ó ., así $4a^2b\times 2bc$; $4bc.2cd$; ó el multiplicando arriba y el multiplicador debajo, así

$$\begin{array}{r} 4a^2b \\ \times 6bc \\ \hline \end{array}$$

61. *Resolución.* Se efectúa siguiendo las cuatro reglas siguientes:

1ª. *Signos* $\left\{\begin{array}{l} \text{iguales}: +\times+;\ -\times- \\ \text{desiguales}: +\times-;\ -\times+ \end{array}\right\}$ dan $\left\{\begin{array}{c} + \\ - \end{array}\right\}$

para el producto $\left\{\begin{array}{l} a\times b=ab;\ -a\times+b=-ab. \\ a\times-b=-ab;\ -a\times-b=ab. \end{array}\right.$

2ª. *Coeficientes.*—Se multiplican unos por otros: $4a^2b\times 3ab^2=12a^3b^3$.

3ª. *Letras* $\left\{\begin{array}{l} \text{iguales, se reducen á una sola, con un exponente igual á la suma de ellos.} \\ \text{desiguales, se escriben en órden alfabético: } 3ab\times 2cd=6abcd. \end{array}\right.$

4ª. *Exponentes.* $\left\{\begin{array}{l}\text{En letras iguales, se suman: } 3a^2b^3 \times 4a^3b^2 = 12a^5b^5. \\ \text{En letras desiguales, no se alteran: } 3a^2b^3c \times 2de = 6a^2b^3cde.\end{array}\right.$

Demostración de la regla de signos.

62. Demuéstrase basándose en los dos principios siguientes:

1º. Que la multiplicación es un caso particular de la adición en que los sumandos son iguales, y que la suma es de la especie de los sumandos.

2º. Que dos multiplicaciones equivalentes dan productos equivalentes.

Ejemplo de los cuatro casos posibles:

1º. $3a \times 2b = 3 \times 2ab = 2ab + 2ab + 2ab = 6ab.$
2º. $3a \times -2b = 3 \times -2ab = -2ab - 2ab - 2ab = -6ab.$
3º. $-3a \times 2b = -3ab \times 2 = -3ab - 3ab = -6ab.$

Estos tres primeros casos se demuestran por el primer principio, convirtiendo la multiplicacion en adición. En el primer caso es claro que sumandos positivos deben dar suma positiva. En el 2º y 3º se ha tomado como sumando el término que tiene signo *menos*; se ha repetido las veces que expresa el término de signo *más*, y se le ha puesto el signo de los sumandos á la suma, que es el signo *menos*, y queda así demostrado que signos contrarios dan *menos*.

El cuarto caso, es decir, que *menos* por *menos* da *más*, se demuestra por el 2º principio.

Sean las multiplicaciones equivalentes:

$$\begin{array}{ccc} 1^a. & & 2^a. \\ 4a - 2a & = & 2a \\ \times 5b - 2b & = & \times 3b \\ \hline 20ab - 10ab - 8ab \pm 4ab & & 6ab \text{ producto.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -18ab & & \\ \hline 2ab & 2ab & 2ab \\ \pm 4ab & -4ab & 4ab \\ \hline & -2ab & 6ab \text{ producto.} \end{array}$$

La 2ª multiplicación da por producto 6ab, y eso mismo debe dar la primera, que es su equivalente.

Ahora bien: La 1ª da cuatro productos parciales: $4a \times 5b = 20ab$ con signo más. $5b \times -2a = -10ab$; y $4a \times -2b = -8ab$, porque se ha visto ya que signos contrarios dan *menos*. Sumados los dos últimos productos dan $-18ab$, que restado del primero 20ab, queda 2ab. Ahora, $-2a \times -2b = \pm 4ab$. Si se supone el signo *menos*, y se resta de 2ab, dará $2ab - 4ab = -2ab$ que no es 6ab, producto que debe obtenerse; pero asignándole el signo *más* será: $2ab + 4ab = 6ab$, producto verdadero. Luego *menos* por *menos* da *más*.

63. Puede haber tres casos de multiplicación, que son: 1º, monomio por monomio; 2º, polinomio por monomio; 3º, polinomio por polinomio.

Caso I.

64. Se resuelve multiplicando un término por otro según las cuatro reglas dadas, sobre los elementos de los términos.

$$\begin{array}{cccc} 1. & 2. & 3. & 4. \\ 6x^2y & a^3cd^4 & -4a^2bc & -4a^2bc \\ 5xy^2 & -6a^2c^2de & 5a^3b^2c & -3abcd \\ \hline 30x^3y^3 & -6a^5c\,d^5e & -20a^5b^3c^2 & 12a^3b^2c^2d \end{array}$$

5. Multiplicar $16a^2b^3c$ por $5ab^2d$. Resp.: $80a^3b^5cd$.
6. Multiplicar $8m^2n^3$ por $-4m^3n^2d$. Resp.: $-32m^5n^5d$.
7. Multiplicar $-4x^2y^3$ por $3x^2y^2$. Resp.: $-12x^4y^5$.
8. Multiplicar $-2abcd$ por $-3a^2b^2c^2$. Resp.: $6a^3b^3c^3d$.

Caso II.

65. Se plantea poniendo el polinomio arriba y el monomio debajo, y se resuelve multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio, siguiendo las cuatro reglas dadas.

1.

$$\begin{array}{l} 2a^2b+3b^3c+d \\ 4a^2bc \\ \hline 8a^4b^2c+12a^2b^4c^2+4a^2bcd \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l} \;\;4a^2b+3cd+2d \\ -3a^2b \\ \hline -12a^4b^2-9a^2bcd-6a^2bd \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l} -2a^3b-4a^6c-m^2n^3 \\ \;\;3a^2bm \\ \hline -6a^5b^2m-12a^8bcm-3a^2bm^3n^3 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l} -2ab-3bc-4de \\ -3ab \\ \hline \;\;6a^2b^2+9ab^2c+12abde \end{array}$$

5. Multiplicar $4a^2b+3cd+d$ por $3a^2b$. Resp.: $12a^4b^2+9a^2cbd+3a^2bd$.

6. Multiplicar $2a^3b^2m-4a^2+3b^2$ por $-4a$. Resp.: $-8a^4b^2m+16a^3-12ab^2$.

7. Multiplicar $-4a-2b-3c$ por $6abc$. Resp.: $-24a^2bc-12ab^2c-18abc^2$.

8. Multiplicar $-2m-3n-4y$ por $-2ab$. Resp.: $4abm+6abn+8aby$.

9. Multiplicar $2a+1-2$ por $3bc$. Resp.: $6abc+3bc-6bc$.

Caso III.

66. Se plantea poniendo un polinomio debajo del otro polinomio, y se resuelve multiplicando cada término del multiplicador por todos los términos del multiplicando, comenzando por la izquierda, á diferencia de la multiplicación de la Aritmética que se efectúa de derecha á izquierda. Luégo se suman los productos parciales, y si es posible alguna reducción, se hace.

1.

$$\begin{array}{l} 2a^3b+3cd+d \\ 4a^2b+3bd \\ \hline 8a^5b^2+12a^2bcd+4a^2bd \\ \qquad 6a^3b^2d+9bcd^2+3bd^2 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l} 2a^3-4ab+5cd \\ 4ab+3b-2c \\ \hline 8a^4b-16a^2b^2+20abcd \\ \qquad 6a^3b-12ab^2+15bcd \\ \qquad\qquad -4a^3c+8abc-10c^2d \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l} a+b+c+d \\ a+b+c+d \\ \hline a^2+ab+ac+ad \\ \qquad ab+b^2+bc+bd \\ \qquad\qquad ac+bc+c^2+cd \\ \qquad\qquad\qquad ad+bd+cd+d^2 \\ \hline a^2+2ab+2ac+2bc+2bd+b^2+c^2+d^2 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l} -a-b-c \\ -a-b-c \\ \hline a^2+ab+ac \\ \qquad ab+b^2+bc \\ \qquad\qquad ac+bc+c^2 \\ \hline a^2+2ab+2ac+2bc+2bd+b^2+c^2+d^2 \end{array}$$

Productos Notables.

67. I. El producto de la suma de dos cantidades por sí misma, ó su cuadrado, es igual al cuadrado del primer término, mas dos veces el producto del primero por el segundo; mas el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

$$\begin{array}{l} a+b \\ \hline a^2+ab \\ \qquad ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

II. El producto de la diferencia de dos cantidades por sí misma, ó su cuadrado, es igual al cuadrado del primer término, menos el duplo del primero por el segundo; mas el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$$

$$\begin{array}{l} a-b \\ \hline a^2-ab \\ \qquad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

III. El producto de la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual á la diferencia de los cuadrados de estas cantidades.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\begin{array}{l} a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

68. *Fórmula*, según hemos dicho, es la expresión algébrica de un principio general. Los tres ejemplos anteriores son fórmulas que nos sirven para formar de pronto los productos de binomios análogos.

Descomposición en factores.

69. *Los Factores* de una cantidad son las cantidades que multiplicadas unas por otras la producen.

70. *Factor Primo* es el que no puede ser producido por la multiplicación de dos ó más factores; de modo que sólo es divisible por sí mismo, ó por la unidad.

71. Para descomponer un monomio en factores, basta descomponer el coeficiente en sus factores, y repetir las letras tantas veces como unidades tienen sus exponentes.

1. $15a^4b^2=3\times5\times aaaabb$ 2. $24a^3b^2c^3=2\times3\times4aaabbccc$

72. Para descomponer un polinomio en factores, se vé el factor que haya común á todos los términos; éste se pone fuera de paréntesis, y los demás factores no comunes dentro.

1.

$$2a^4bx-6a^2+4a^2c=2a^2(a^2bx-3+2c)$$

2.

$$3b^5c^2+6b^2c^2-9bc^2=3bc^2(b^4+2b-3)$$

3. $a^3b+3a^2b^2+5a^2bc$. Resp.: $a^2b(a+3b+5c)$.
4. $3x^2y^2-3x^4y^2+3x^2y^4-6x^3y^3$. Resp.: $3x^2y^2(1-x^2+y^2-2xy)$.

5. a^5m-9am^3. Resp.: $am(a^2-3m)(a^2+3m)$.
6. $8b^3-x^3$. Resp.: $(4b^2+2bx+x^2)(2b-x)$.
7. $5a^3c^2d-15a^2c^3d^2-5a^2c^2dm$. Resp.: $5a^2c^2d(a-3cd-m)$.
8. $b^3-bc^2+2bcd-bd^2$. Resp.: $b(b+c-d)(b-c+d)$.

DIVISIÓN.

73. *División* es la operación por la cual se encuentra las veces que una cantidad, que se llama *Dividendo*, contiene á otra que se llama *Divisor*. El resultado se llama *Cociente*.

74. Para efectuar la división, obsérvense las siguientes reglas:

1ª. *Signos*:
- iguales, es decir $+\div+$, ó $-\div-$ dan $+$ para el cociente
- desiguales, es decir $+\div-$, ó $-\div+$ dan $-$ para el cociente

$$\begin{array}{r|l} 4a & 2a \\ \hline & 2a \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -4a & -2a \\ \hline & 2a \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4a & -2a \\ \hline & -2a \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -4a & 2a \\ \hline & -2a \end{array}$$

De manera que la regla de signos es la misma que en la multiplicación; y la razón es por que la división puede considerarse como una multiplicación en que, dado el producto (que es el dividendo), y uno de los factores (que es el divisor), hallar el otro factor (que es el cociente).

2ª. *Coeficientes.*—Se dividen unos entre otros:

$$\begin{array}{r|l} 8a & 2a \\ \hline & 4 \end{array}$$

III. El producto de la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual á la diferencia de los cuadrados de estas cantidades.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$\begin{array}{r}
a+b \\
a-b \\
\hline
a^2+ab \\
-ab-b^2 \\
\hline
a^2-b^2
\end{array}$$

68. *Fórmula*, según hemos dicho, es la expresión algébrica de un principio general. Los tres ejemplos anteriores son fórmulas que nos sirven para formar de pronto los productos de binomios análogos.

Descomposición en factores.

69. *Los Factores* de una cantidad son las cantidades que multiplicadas unas por otras la producen.

70. *Factor Primo* es el que no puede ser producido por la multiplicación de dos ó más factores; de modo que sólo es divisible por sí mismo, ó por la unidad.

71. Para descomponer un monomio en factores, basta descomponer el coeficiente en sus factores, y repetir las letras tantas veces como unidades tienen sus exponentes.

1. $15a^4b^2=3\times5\times aaaabb$

2. $24a^3b^2c^3=2\times3\times4aaabbccc$

72. Para descomponer un polinomio en factores, se vé el factor que haya común á todos los términos; éste se pone fuera de paréntesis, y los demás factores no comunes dentro.

1. $2a^4bx-6a^2+4a^2c=2a^2(a^2bx-3+2c)$

2. $3b^5c^2+6b^2c^2-9bc^2=3bc^2(b^4+2b-3)$

3. $a^3b+3a^2b^2+5a^2bc$. Resp.: $a^2b(a+3b+5c)$.

4. $3x^2y^2-3x^4y^2+3x^2y^4-6x^3y^3$. Resp.: $3x^2y^2(1-x^2+y^2-2xy)$.

5. a^5m-9am^3. Resp.: $am(a^2-3m)(a^2+3m)$.

6. $8b^3-x^3$. Resp.: $(4b^2+2bx+x^2)(2b-x)$.

7. $5a^3c^2d-15a^2c^3d^2-5a^2c^2dm$. Resp.: $5a^2c^2d(a-3cd-m)$.

8. $b^3-bc^2+2bcd-bd^2$. Resp.: $b(b+c-d)(b-c+d)$.

DIVISIÓN.

73. *División* es la operación por la cual se encuentra las veces que una cantidad, que se llama *Dividendo*, contiene á otra que se llama *Divisor*. El resultado se llama *Cociente*.

74. Para efectuar la división, obsérvense las siguientes reglas:

1ª. *Signos*:
- iguales, es decir $+\div+$, ó $-\div-$ dan $+$ para el cociente:

$$4a \div 2a = 2a \qquad -4a \div -2a = 2a$$

- desiguales, es decir $+\div-$, ó $-\div+$ dan $-$ para el cociente:

$$4a \div -2a = -2a \qquad -4a \div 2a = -2a$$

De manera que la regla de signos es la misma que en la multiplicación; y la razón es por que la división puede considerarse como una multiplicación en que, dado el producto (que es el dividendo), y uno de los factores (que es el divisor), hallar el otro factor (que es el cociente).

2ª. *Coeficientes*.—Se dividen unos entre otros:

$$8a \div 2a = 4$$

3ª. *Letras.*
- Se ponen en el cociente.
  - 1º. Las que haya en el dividendo, y no en el divisor: $\begin{array}{l|l} 4ab & 2b \\ \cline{2-2} & 2a \end{array}$
  - 2º Las comunes en dividendo y divisor, con mayor exponente en el dividendo: $\begin{array}{l|l} 4a^2b & 2ab \\ \cline{2-2} & 2a \end{array}$
- No se ponen en el cociente.
  - 1º. Las que hay en el divisor y no en el dividendo: $\begin{array}{l|l} 4a & 2b \\ \cline{2-2} & 2a \end{array}$
  - 2º. Las comunes en dividendo y divisor, con igual exponente: $\begin{array}{l|l} 4a^2b & 2a^2 \\ \cline{2-2} & 2b \end{array}$

4ª. *Exponentes.*—En letras
- iguales, se restan, si es mayor el del dividendo: $\begin{array}{l|l} 4a^4 & 2a^2 \\ \cline{2-2} & 2a^2 \end{array}$
- desiguales, no se tocan: $\begin{array}{l|l} 8a^2b^2 & 4a \\ \cline{2-2} & 2ab^2 \end{array}$

75. Puede haber tres casos de división que son: 1º, monomio entre monomio; 2º, polinomio entre monomio, y 3º, polinomio entre polinomio.

Caso I.

76. Plantéase, colocando el dividendo á la izquierda y el divisor á la derecha, separados por el signo $\div$ ó $|\underline{\quad}$. Se resuelve, aplicando las cuatro reglas dadas; y una vez hallado el cociente, se multiplica por el divisor y el producto se escribe, cambiándole el signo, debajo del dividendo, del cual se resta.

1.

$$\begin{array}{l|l} 4a^2b^2 & 2ab \\ \cline{2-2} -4a^2b^2 & 2ab \\ \hline 00 & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l|l} 6a^3b^5 & -3ab^5 \\ \cline{2-2} -6a^3b^5 & -2a^2 \\ \hline 00 & \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l|l} -4a^2b^2 & 2ab^2 \\ \cline{2-2} 4a^2b^2 & -2a \\ \hline 00 & \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l|l} -4a^2b^2 & -4a^2b^2 \\ \cline{2-2} 4a^2b^2 & 1 \\ \hline 00 & \end{array}$$

Caso II.

77. Plantéase, colocando el polinomio dividendo á la izquierda y el monomio divisor á la derecha, separados por el signo, y previa ordenación. Se resuelve aplicando las reglas dadas. Dividido el primer término del dividendo por el divisor, y hallado el cociente, se multiplica por el divisor, este producto se escribe con el signo cambiado, debajo del dividendo, y se efectúa la resta. El primer término del residuo se considera como dividendo parcial; se vuelve á dividir, y así hasta que quede terminada la operación, exactamente, ó con algún residuo.

1.

$$\begin{array}{l|l} 4a^3b^2+6a^2b+2a & 2a \\ \cline{2-2} -4a^3b^2 & 2a^2b^2+3ab+1 \\ \cline{1-1} 0 \quad 6a^2b+2a & \\ \quad -6a^2b & \\ \cline{1-1} \quad 0 \quad 2a & \\ \quad\quad -2a & \\ \cline{1-1} \quad\quad 00 & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l|l} 6m^6-4m^4+2m & -2m \\ \cline{2-2} -6m^6 & -3m^5+2m^3-1 \\ \cline{1-1} 0 \quad -4m^4+2m & \\ \quad 4m^4 & \\ \cline{1-1} \quad 0 \quad 2m & \\ \quad\quad -2m & \\ \cline{1-1} \quad\quad 00 & \end{array}$$

Caso III.

78. Plantéase como en el caso anterior, pero efectuando en el divisor la ordenación con respecto á la misma letra que se ha hecho en el dividendo. Se resuelve comparando el primer término del dividendo con el primero del divisor para hallar el cociente; luégo se multiplica éste por todo el divisor, de izquierda á derecha; y los productos se colocan debajo del dividendo, con los signos cambiados, y se hace la sustracción. Si queda residuo, se continúa del mismo modo hasta concluir.

1.

$$\begin{array}{l|l} a^2-\ b^2 & a+b \\ \hline -a^2-ab & a-b \\ \hline 0\ -ab-b^2 & \\ \quad\ \ ab+b^2 & \\ \hline \quad\ 00 & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l|l} a^2-\ b^2 & a-b \\ \hline -a^2+ab & a+b \\ \hline 0\quad ab-b^2 & \\ \quad -ab+b^2 & \\ \hline \quad\ 00 & \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l|l} a^2+2ab+b^2 & a+b \\ \hline -a^2-\ ab & a+b \\ \hline \quad ab+b^2 & \\ \quad -ab-b^2 & \\ \hline \quad\ 00 & \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l|l} a^2-2ab+b^2 & a-b \\ \hline -a^2+\ ab & a-b \\ \hline 0\ -\ ab+b^2 & \\ \qquad ab-b^2 & \\ \hline \qquad 00 & \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{l} -12a^9b^6c^3+16a^8b^7cm^3n^2+6a^5b^4c^2-8a^4b^5m^3n^2+6a^3bc^2m^2n^3- \\ \quad +3a^3bc^2d-8a^2b^2m^5n^5-4a^2b^2dm^3n^2- \\ \hfill \underline{\big|\ -4a^6b^5c+2a^2b^3+2m^2n^3+d} \\ \hfill 3a^3bc^2-4a^2b^2m^3n^2 \\ \underline{12a^9b^6c^3-6a^5b^4c^2-6a^3bc^2m^2n^3-3a^3bc^2d} \\ 16a^8b^7cm^3n^2-8a^4b^5m^3n^2-8a^2b^2m^5n^5-4a^2b^2dm^3n^2 \\ \underline{-16a^8b^7cm^3n^2+8a^4b^5m^3n^2+8a^2b^2m^5n^5+4a^2b^2dm^3n^2} \\ \qquad 00 \qquad\qquad\qquad\qquad 00 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{l|l} \frac{2}{7}a^3-\frac{9}{35}ab^2+\frac{1}{6}a^2b-\frac{3}{20}b^3 & \frac{2}{3}a^2-\frac{3}{5}b^2 \\ \hline -\frac{2}{7}a^3+\frac{9}{35}ab^2 & \frac{3}{7}a+\frac{1}{4}b \\ \hline 00 \qquad \frac{1}{6}a^2b-\frac{3}{20}b^3 & \\ \qquad\ \ -\frac{1}{6}a^2b+\frac{3}{20}b^3 & \\ \hline \qquad\qquad 00 & \end{array}$$

$\frac{2}{7}\div\frac{2}{3}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$ 1r Cociente numérico.

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$ 1r Producto.

$-\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=-\frac{9}{35}$ 2° Producto.

$\frac{1}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ 2° Cociente numérico.

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ 1r Producto.

$-\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=-\frac{3}{20}$ 2° Producto.

79. Cuando los coeficientes son fracciones, se halla el cociente dividiendo las fracciones del primer término del dividendo y divisor como en la Aritmética, es decir, multiplicando en cruz; y hallado el cociente, se multiplica por el divisor, multiplicando las fracciones como en la Aritmética, es decir, numerador por numerador, y denominador por denominador.

División Exacta.

80. La división es exacta, cuando no queda residuo, ó, lo que es lo mismo, cuando el cociente no contiene parte fraccionaria.

81. No es posible la división exacta de un monomio por otro:

1°. Cuando sus coeficientes no son divisibles exactamente.

2°. Cuando un factor literal tiene mayor exponente en el divisor que en el dividendo.

3°. Cuando hay un factor literal en el divisor y no en el dividendo.

1. $5a^2b \,\underline{|\ 4ab}$ 2. $6ab^2 \,\underline{|\ 6a^2b}$ 3. $6ab \,\underline{|\ 6abd}$

82. En estos casos se puede simplificar la expresión, poniendo la división en forma de fracción, y suprimiendo los factores comunes en dividendo y divisor.

1.	2.	3.
$\frac{5a^2b}{4ab}=\frac{5a}{4}$	$\frac{6ab^2}{6a^2b}=\frac{b}{a}$	$\frac{6ab}{6abd}=\frac{1}{d}$

83. No es posible la división exacta de un polinomio por otro:

1°. Cuando el primer término del divisor, ordenado con referencia á una de sus letras, no está contenido exactamente en el primero del dividendo.

2°. Cuando queda un residuo que no contiene exactamente el primer término del divisor.

Relaciones Generales en la División.

84. El valor algébrico de un cociente depende del valor comparativo y de los signos relativos del dividendo y divisor; de manera que si éstos sufren algún cambio en su valor ó su signo, también lo sufrirá el cociente del siguiente modo.

1°. *Cambio de valor.*

85. En cualquier caso de división exacta, compónese el cociente de aquellos factores del dividendo que no están incluidos entre los factores del divisor. Por tanto es evidente que si se introduce un nuevo factor en el dividendo, permaneciendo intacto el divisor, se habrá introducido dicho factor en el cociente; y si se suprime un factor del dividendo, sin tocar el divisor, se habrá suprimido dicho factor del cociente. Y si, al contrario, se introduce un factor en el divisor, dejando intacto el dividendo, se habrá excluido dicho factor del cociente; y si se suprime un factor del divisor, sin afectar el dividendo, se habrá introducido dicho factor en el cociente.

De aquí,

I. *Multiplicando el dividendo, se multiplica el cociente, y dividiendo el dividendo se divide el cociente.*

II. *Multiplicando el divisor, se divide el cociente, y dividiendo el divisor, se multiplica el cociente.*

III. *Multiplicando ó dividiendo á la vez dividendo y divisor por una misma cantidad, no varía el cociente.*

2°. *Cambio de Signos.*

86. Para mostrar de que manera es afectado el signo del cociente por el cambio de signos en dividendo ó divisor, recordaremos que dos signos pueden estar en relación de las tres maneras siguientes:

$$+\,+$$
$$+\,-$$
$$-\,-$$

Ahora bien, si sólo uno de los signos en cualquiera de esos pares sufre alteración, quedará alterada la relación de los signos, ya de iguales á desiguales, ya de desiguales á iguales; pero si ambos signos se cambian en cualquiera de los pares, no se alterará su relación.

De aquí,

I. *Cambiando el signo del dividendo ó del divisor, cambiará el signo del cociente.*

II. *Cambiando los signos del dividendo y divisor á la vez, no cambiará el signo del cociente.*

Recíproca, Exponente Cero y Negativo.

87. *Recíproca* de una cantidad, es el cociente que resulta de dividir la unidad por aquella cantidad. Así, $\frac{1}{x}$ es la recíproca de x, y $\frac{1}{a-b}$ es la recíproca de $a-b$.

88. Al dividirse una letra con exponente por la misma letra afectada por otro, se resta el exponente del divisor, del exponente del dividendo, y se obtiene el exponente del cociente. Así,

$$a^5 \div a^3 = a^{5-3} = a^2\,;\ a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3.$$

Y en general

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Si en esta expresión es $n=m$, el exponente del cociente será *o*; y si $n>m$, el exponente será negativo.

Ahora bien, por lo dicho antes sobre la división, tenemos que

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^o.$$

Pero el cociente que se obtiene de la división de una cantidad por sí misma es igual á 1. Así, $\frac{a^m}{a^m}=1$. Luego $a^o=1$, en virtud del axioma 7°.

De aquí, $(10)^o=1$; $(100)^o=1$, etc.

1°. *Una cantidad con exponente cero, es igual á la unidad.*

Además, por lo dicho de la división tenemos,

$$\frac{a^o}{a^m}=a^{o-m}=a^{-m}.$$

Pero se ha demostrado ya que $a^o=1$. Sustituyendo este valor en el dividendo, se obtiene el cociente en otra forma.

$$\frac{a^o}{a^m}=\frac{1}{a^m}.$$

Y según el axioma 7° tenemos

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$$

De donde,

2°. *Una cantidad con exponente negativo, es igual á la recíproca de dicha cantidad con un exponente igual, pero positivo.*

EJEMPLOS.

1°. $\frac{a}{f}=af^{-1}$, porque $af^{-1}=a\times\frac{1}{f}=\frac{a}{f}$.

2°. $\frac{a}{f}=\frac{1}{fa^{-1}}$, porque $\frac{1}{fa^{-1}}=\frac{1}{f\times a^{-1}}=\frac{1}{f\times\frac{1}{a}}=\frac{\frac{1}{f}}{a}=1\div\frac{f}{a}=\frac{a}{f}$.

3°. $\frac{a}{f}=\frac{f^{-1}}{a^{-1}}$, porque $f^{-1}\div a^{-1}=\frac{1}{f}:\frac{1}{a}=\frac{a}{f}$.

Del primer ejemplo se deduce que se puede pasar el denominador de una fracción al numerador, cambiándole el signo al exponente, así: $\frac{a^2}{b^3}=a^2b^{-3}$; $\frac{a^3}{b^2c^3}=\frac{a^3c^{-3}}{b^2}=a^3b^{-2}c^{-3}=\frac{a^3b^{-2}}{c^3}$.

Del segundo, que se puede pasar el numerador al denominador cambiándole el signo al exponente, así: $\frac{ab}{f}=\frac{b}{fa^{-1}}=\frac{a}{fb^{-1}}=\frac{1}{fa^{-1}b^{-1}}$, poniendo la unidad en el numerador cuando se baje todo el numerador.

Del tercero, que se pueden invertir los términos de una fracción, es decir, poner el numerador por denominador, y el denominador por numerador, cambiando el signo á los exponentes.

Divisibilidad de cantidades bajo la forma $a^m\pm b^m$.

89. Hay ciertos casos de división exacta bajo la forma a^m+b^m, ó a^m-b^m que tienen aplicaciones importantes; y se manifiesta en los cuatro problemas generales siguientes:

1°. Dividir a^m+b^m entre $a+b$.

Comenzando la división tenemos:

$m-2$
a^m
$-a\,b$

$$\begin{array}{l|l}
a^m+b^m & a+b \\ \hline
-a^m-a^{m-1}b & a^{m-1}-a^{m-2}b
\end{array}$$

1r Residuo. $-a^{m-1}b+b^m=-b(a^{m-1}-b^{m-1})$
$+a^{m-1}b+a^{m-2}b^2$

2° Residuo. $a^{m-2}b^2+b^m=+b^2(a^{m-2}+b^{m-2})$

Si se continúa la división, se observará que los residuos (inspeccionados en los valores iguales que les hemos puesto al lado), siguen el siguiente orden:

1°. La *b* fuera del paréntesis, aparece en el 1r residuo con exponente 1, el cual va aumentando una unidad en cada residuo subsiguiente; de manera que en el último tendrá el valor del exponente de la potencia; si este es *m*, será b^m.

2°. Los dos términos dentro del paréntesis, llevan iguales exponentes; en el 1r residuo es $m-1$, y en los siguientes, disminuyendo en una unidad; de manera que en el último residuo será dicho exponente $m-m$.

Ahora bien,

Si el exponente de la potencia es impar, el último residuo será análogo al primer residuo, ó residuo impar; pero transformándole los exponentes, así:

De $-b(a^{m-1}-b^{m-1})$ tendremos: $-b^m(a^{m-m}-b^{m-m})=$
$-b^m(a^0-b^0)=-b^m(1-1)=-b^m+b^m=0.$

Luego la división será exacta cuando es impar el exponente de la potencia.

Si el exponente de la potencia es par, el último residuo será análogo al 2° residuo, ó residuo par; pero transformándole los exponentes, así:

De $+b^2(a^{m-2}+b^{m-2})$ tendremos: $+b^m(a^{m-m}+b^{m-m})=$
$b^m(a^0+b^0)=b^m(1+1)=b^m+b^m=2b^m.$

Luego la división no será exacta, al ser par el exponente de la potencia.

Y en general,

La suma de una misma potencia de dos cantidades es divisible exactamente por la suma de dichas cantidades si la potencia es impar; pero no lo será si la potencia es par.

2°. Dividir a^m+b^m entre $a-b$.

Tendremos:

$$\begin{array}{lll} & a^m+b^m & \mid \; a-b \\ & -a^m+a^{m-1}b & \; a^{m-1}+a^{m-2}b \\ \text{1}^{\text{r}}\text{ Residuo.} & a^{m-1}b+b^m=b(a^{m-1}+b^{m-1}) & \\ & -a^{m-1}b+a^{m-2}b^2 & \\ \text{2° Residuo.} & a^{m-2}b^2+b^m=b^2(a^{m-2}+b^{m-2}) & \end{array}$$

Si se continúa la división, es evidente que siendo m impar, tendremos el último residuo análogo al primer residuo, ó impar, pero transformándole los exponentes, así:

De $b(a^{m-1}+b^{m-1})$ tendremos: $b^m(a^{m-m}+b^{m-m})=b^m(a^0+$
$b^0)=b^m(1+1)=b^m+b^m=2b^m.$

Queda un residuo, luego no es divisible exactamente.

Si m es par, tendremos el último residuo, análogo al segundo residuo pero transformados los exponentes, así:

De $b^2(a^{m-2}+b^{m-2})$ tendremos: $b^m(a^{m-m}+b^{m-m})=b^m(a^0$-
$+b^0)=b^m(1+1)=b^m+b^m=2b^m.$

Queda un residuo, luego no es divisible exactamente.

Y en general,

La suma de una misma potencia de dos cantidades no es divisible exactamente por la diferencia de dichas cantidades, sea la potencia par ó impar.

3°. Dividir a^m-b^m entre $a+b$.

Tendremos:

$$\begin{array}{lll} & a^m-b^m & \mid \; a+b. \\ & -a^m-a^{m-1}b & \; a^{m-1}-a^{m-2}b \\ \text{1}^{\text{r}}\text{ Residuo.} & -a^{m-1}b-b^m=-b(a^{m-1}+b^{m-1}) & \\ & a^{m-1}b+a^{m-2}b^2 & \\ \text{2° Residuo.} & a^{m-2}b^2-b^m=b^2(a^{m-2}-b^{m-2}) & \end{array}$$

Si se continúa la división, es evidente que al ser m impar, será el último residuo análogo al primer residuo, transformados sus exponentes así:

De $-b(a^{m-1}+b^{m-1})$ tendremos: $-b^m(a^{m-m}+b^{m-m})=$
$-b^m(a^0+b^0)=-b^m(1+1)=-b^m-b^m=-2b^m.$

Queda residuo, luego no es divisible.

Siendo m par tendremos.

Del 2° residuo $b^2(a^{m-2}-b^{m-2})\ldots b^m(a^{m-m}-b^{m-m})=b^m(a^0$-
$-b^0)=b^m(1-1)=b^m-b^m=0.$

No queda residuo, luego la división es exacta.

Y en general,

La diferencia de una misma potencia de dos cantidades es divisible exactamente por la suma de dichas cantidades cuando la potencia es par; pero no la es cuando la potencia es impar.

4°. Dividir a^m-b^m entre $a-b$.

Tendremos:

$$\begin{array}{lll} & a^m-b^m & \mid \; a-b \\ & -a^m+a^{m-1}b & \; a^{m-1}+a^{m-2}b \\ \text{1}^{\text{r}}\text{ Residuo.} & a^{m-1}b-b^m=b(a^{m-1}-b^{m-1}) & \\ & -a^{m-1}b+a^{m-2}b^2 & \\ \text{2° Residuo.} & a^{m-2}b^2-b^m=b^2(a^{m-2}-b^{m-2}) & \end{array}$$

Si continuamos la división es evidente que el último residuo, sea par ó impar la potencia, es:

$b^m(a^{m-m}-b^{m-m})=b^m(a^0-b^0)=b^m(1-1)=b^m-b^m=0.$

Luego,

La diferencia de una misma potencia de dos canti-

dades es divisible exactamente por la diferencia de dichas cantidades, sea la potencia par ó impar.

90. Si continuamos la división en los problemas 1°, 3° y 4°, buscando los cocientes correspondientes á los casos de división exacta los tendremos, así:

$$\frac{a^m+b^m}{a+b}=a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-a^{m-4}b^3\ldots-ab^{m-2}+b^{m-1}\ldots(1).$$

$$\frac{a^m-b^m}{a+b}=a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-a^{m-4}b^3\ldots+ab^{m-2}-b^{m-1}\ldots(2).$$

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}\ldots(3).$$

Y dando valores numéricos á *m* en (1), (2) y (3) tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2\\ \dfrac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\end{array}\right\}(1).$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b\\ \dfrac{a^4-b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3\end{array}\right\}(2).$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b\\ \dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2\\ \dfrac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3\\ \dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\end{array}\right\}(3).$$

Máximo Común Divisor.

91. *Común divisor* de dos ó más cantidades, es la cantidad que divide á cada una de ellas exactamente.

92. *Máximo común divisor* de dos ó más cantidades, es la mayor cantidad de las que pueden dividir exactamente á cada una de ellas.

93. *Cantidades primas entre sí*, son las que no tienen factor común.

Caso I.

94. *Cuando puede hallarse por la simple inspección.*

1°. *En Monomios.* Se obtiene sacando primero el mayor factor común que haya en los coeficientes, el cual será el número mayor que pueda dividirlos: luégo se sacan los factores comunes literales, separando las letras comunes á ambos términos, con un exponente igual al menor que tengan dichas letras: multiplícanse los factores hallados, unos por otros, y el producto será el máximo común divisor.

2°. *En Polinomios.* Siguiendo las reglas anteriores y aplicando las dadas para descomponer esta clase de cantidades en factores.

EJEMPLOS.

De Monomios.—1. $2a^3b^2c^4$, y $8a^2b^4c^3$. Resp.: $2a^2b^2c^3$.
2. $15a^2b^5c$, y $3ab^4c^3$. Resp.: $3ab^4c$.
3. $16abcd$, y $4a^2b^2c^2d^2$. Resp.: $4abcd$.
4. $10a^2bcd$, y $13a^2b^3$. Resp.: a^2b.

De Polinomios.—Sean 1. $a^5-2a^3x^2+ax^4$, y $a^4-2a^3x+a^2x^2$.

Sacando los factores tendremos:

De $a^5-2a^3x^2+ax^4=a(a^4-2a^2x^2+x^4)=a(a-x)^2(a+x)^2$.

De $a^4-2a^3x+a^2x^2=a^2(a^2-2ax+x^2)=a^2(a-x)^2$.

Los menores exponentes en los factores comunes son: *a*, y $(a-x)^2$; multiplicándolos tendremos:

$$a(a-x)^2=a(a^2-2ax+x^2)=a^3-2a^2x+ax^2.$$

2. x^2-y^2, $x^2-2xy+y^2$. Resp.: $x-y$.
3. a^2m-b^2m, y $2ac^2m-2c^2bm$. Resp.: $m(a-b)$.

CASO II.

95. *Cuando no puede hallarse por la simple inspección.*

En este caso se encuentra el máximo común divisor descomponiendo las cantidades por medio de divisiones sucesivas.

96. Pero para demostrar que el máximo común divisor hallado después de varias divisiones sucesivas, divide también á las cantidades primitivas, nos apoyaremos en el siguiente principio:

Que una cantidad que divide exactamente el divisor y el residuo de una división, divide también el dividendo.

Sea D el dividendo, d el divisor, q el cociente y r el residuo.

Tendremos $D=dq+r$.

Supongamos que m divide exactamente el divisor d y el residuo r. Dividiendo el divisor, divide también su producto por el cociente dq, porque este producto no es sino el divisor repetido cierto número de veces; y dividiéndolo una vez, lo divide varias.

Será, pues, $D=dq+r$ dividido por m.

$$\frac{D}{m}=\frac{dq}{m}+\frac{r}{m}.$$

Los cocientes $\frac{dq}{m}$ y $\frac{r}{m}$ son enteros por el supuesto; luego el cociente $\frac{D}{m}$ también será entero, porque debe ser igual á la suma de los dos primeros $\frac{dq}{m}$ y $\frac{r}{m}$ que son enteros; y suma de enteros no puede ser igual ni á fracción ni á entero y fracción.

EJEMPLOS NUMÉRICOS.

1°. 45 | 6 : $6\div3=2$; $42\div3=14$; $3\div3=1$; $45\div3=15$.
 3   7

2°. 63 | 27 : $27\div9=3$; $54\div9=6$; $9\div9=1$; $63\div9=7$.
 9   2

3°. 64 | 24 : 24 | 16 ; $16\div8=2$; $48\div8=6$; $64\div8=8$.
 16   2   8   1

Sea D	d	r	r′	r″	r‴
r	q	q′	q″	q‴	q⁗
	r′	r″	r‴	0	

El máximo común divisor es r‴, que ha dividido exactamente á r″, puesto que el residuo fué cero. En la división de $r'\div r''$, r‴ divide exactamente á r″ divisor, por lo dicho, y á r‴ residuo porque le es igual; luego dividirá también al dividendo r′ en virtud del principio establecido: en la división de $r\div r'$, r‴ divide á r′ ó sea al divisor porque ya lo ha dividido, y también á r″ residuo, luégo divide á r dividendo: en $d\div r$, r‴ divide á r divisor y á r′ residuo, luégo á d dividendo: en $D\div d$, r‴ divide á d divisor y á r residuo, luégo también á D dividendo.

Queda, pues, demostrado que el máximo común divisor, divide á todos los términos de las divisiones sucesivas, y por consiguiente á los dos primeros términos.

97. Para encontrar el máximo común divisor se observará lo siguiente:

1°. Ordénense los dos polinomios tomando la letra mas repetida en ambos por letra de ordenación.

2°. Divídase el mayor por el menor; y si nada queda, el menor será el máximo común divisor; pero si queda algo, se divide el menor por la resta, y luégo esta resta por la otra, y así, hasta que no quede residuo: el último divisor será el máximo común divisor. Pero si no es posible hallar cociente exacto, las cantidades no tendrán máximo común divisor.

98. Pueden además, hacerse ciertas simplicaciones y son:

En los coeficientes.—1°. Si todos los coeficientes de uno y otro polinomio son divisibles exactamente por un mismo número, se dividirán por él, reservando dicho número para multiplicar el máximo común divisor por él, puesto que es uno de sus factores.

2°. Si todos los coeficientes de uno de los polinomios son divisibles por un mismo número, pero no todos los términos del otro polinomio, se pueden dividir por aquel número, pero sin reservarlo, porque no es factor común.

3°. Se pueden multiplicar los coeficientes de uno de los polinomios por el coeficiente del primer término del otro para hacer divisibles primero con primero, ó multiplicar por cualquier número, con tal que se logre ese objeto.

En las letras.—1°. Una letra común á ambos polinomios se puede sacar con el exponente menor, y reservarla para multiplicar por ella el máximo común divisor.

2°. Una letra común en todos los términos de un polinomio pero no á los del otro, se puede sacar con un exponente igual al menor, pero sin reservarse, porque no es factor común.

1°.

Búsquese el máximo común divisor de $6a^3-17a^2b+22ab^2-15b^3$ y $6a^2-17ab+12b^2$.

$$\begin{array}{r|l}
6a^3-17a^2b+22ab^2-15b^3 & 6a^2-17ab+12b^2 \\ \cline{2-2}
-6a^3+17a^2b-12ab^2 & a \\ \hline
10ab^2-15b^3 &
\end{array}$$

Cámbiese el divisor á dividendo, y la resta á divisor porque ya esta es menor.

$$6a^2-17ab+12b^2 \;|\; 10ab^2-15b^3.$$

Pero como en el divisor hay un factor común $5b^2$ que no lo es al dividendo, se puede quitar.

$$\begin{array}{r|l}
6a^2-17ab+12b^2 & 2a-3b \quad \text{Máx. com. divisor} \\ \cline{2-2}
-6a^2+\;9ab & 3a-4b \\ \hline
-\;8ab+12b^2 & \\
8ab-12b^2 & \\ \hline
00 &
\end{array}$$

2°.

$$6a^3-17a^2b+22ab^2-15b^3 \;|\; 10a^2-23ab+12b^2.$$

Como no se puede dividir 6 por 10, se multiplica todo el dividendo por 10, coeficiente del primer término del divisor.

$$\begin{array}{r|l}
60a^3-170a^2b+220ab^2-150b^3 & 10a^2-23ab+12b^2 \\ \cline{2-2}
-60a^3+138a^2b-\;72ab^2 & 6a \\ \hline
-\;32a^2b+148ab^2-150b^3 &
\end{array}$$

Divídase el dividendo por 2.

$-\;16a^2b+\;74ab^2-\;75b^3$ Multiplíquese por 10, y suprímase b

$$\begin{array}{r|l}
-160a^2\;+740ab\;-750b^2 & 10a^2-23ab+12b^2 \\ \cline{2-2}
160a^2\;-368ab\;+192b^2 & -16 \\ \hline
372ab\;-558b^2 &
\end{array}$$

Cámbiese divisor á dividendo, y resta á divisor, dividiendo antes los términos por 186b.

$$\begin{array}{r|l}
10a^2-23ab+12b^2 & 2a-3b \quad \text{Máx. com. divisor} \\ \cline{2-2}
-10a^2+15ab & 5a-4b \\ \hline
-\;8ab+12b^2 & \\
8ab-12b^2 & \\ \hline
00 &
\end{array}$$

MENOR MÚLTIPLO COMÚN.

99. *Múltiplo* de una cantidad es otra cantidad exactamente divisible por la cantidad dada, así: $8a^2b$ es múltiplo de 8, de a^2 y de b.

100. *Múltiplo común* de dos ó mas cantidades, es una cantidad divisible exactamente por cada una de aquellas, así: $24a^3x^2$, es múltiplo común de $6ax$ y $4a^2x$.

101. *Menor múltiplo común*, de dos ó mas cantidades es la menor cantidad que puede ser dividida por ellas exactamente, así: $12a^2b^2x^2$, lo es de $2a^2x$, $4ab^2$, $6a^2b^2x^2$.

Caso I.

102. *Cuando las cantidades pueden descomponerse en factores á primera vista.*

De los principios de la división exacta, pueden sacarse las siguientes consecuencias.

1ª. Un múltiplo de cualquier cantidad debe contener todos los factores de dicha cantidad.

2ª. Un múltiplo común de dos ó mas cantidades debe contener todos los factores de cada una de dichas cantidades.

3ª. El menor múltiplo común de dos ó mas cantidades debe contener todos los factores de cada una de las cantidades, pero no otros factores.

De aquí,

Regla I.—*Hallar por la inspección todos los factores primos que entran en las cantidades dadas, y afectar á cada una de ellos con un exponente igual al mayor exponente que tiene en alguna de las cantidades.*

Regla II.—*Multiplicar unos por otros los factores así obtenidos, y el producto será el menor múltiplo común.*

EJEMPLOS.

1. Hallar el menor múltiplo común de a^2+ab; a^2d-b^2d, y $a^2c-2abc+b^2c$.

Descomponiendo en factores tenemos:

$$a^2+ab=a(a+b).$$
$$a^2d-b^2d=d(a-b)(a+b).$$
$$a^2c-2abc+b^2c=c(a-b)^2.$$

Los mayores exponentes de los diferentes factores primos son: a, c, d, $(a-b)^2$ y $(a+b)$.

Multiplicándolos darán: $acd(a-b)^2(a+b)=a^4cd-a^3bcd-a^2b^2cd+ab^3cd$.

2. Menor múltiplo común de: $2a^4bc$, $5a^2c^2$, $10ab^3d$, $15abcd^2$. Resp.: $30a^4b^3c^2d^2$.

3. Menor múltiplo común de: $3x^2y$, $15xy^2$, $10xyz^3$, $5x^3y^2z$. Resp.: $30x^3y^2z^3$.

4. Menor múltiplo común de: x^2+xy, $xy-y^2$, x^2-y^2. Resp.: x^3y-xy^3.

Caso II.

103. *Cuando las cantidades no pueden descomponerse en factores á primera vista.*

Para este caso se observan las tres reglas siguientes:

Regla I.—*Si son dos polinomios primos entre sí, su menor múltiplo común será el producto de ellos.*

Regla II.—*Si son dos polinomios no primos entre sí, búsquese su máximo común divisor; divídase por él uno de los polinomios; el cociente que resulte se multiplica por el otro polinomio, y el producto será el menor múltiplo común.*

Regla III.—*Si son mas de dos polinomios, búsquese el menor múltiplo común de dos de ellos; luego entre este y otro polinomio se busca el menor múltiplo común, y así se continúa hasta el último polinomio. El resultado final será el menor múltiplo común.*

EJEMPLOS.

Hállese el menor múltiplo común de:

1. $7a^2bc$ y $5mn$. Resp.: $35a^2bcmn$.
2. x^3+x^2-4x+6, y x^3-5x^2+8x-6. Resp.: $x^4-2x^3-7x^2+18x-18$.
3. $a^3-2a^2-19a+20$, y $a^2-12a+35$. Resp.: $a^4-9a^3-5a^2+153a-140$.
4. $a^2+7a+10$, a^2-2a-8, y a^2+a-20. Resp.: $a^3+3a^2-18a-40$.
5. $a^2-3ab+2b^2$, $a^2-ab-2b^2$, y a^2-b^2. Resp.: $a^3-2a^2b-ab^2+2b^3$.
6. $2x^2-7xy+3y^2$, $2x^2-5xy+2y^2$, y $x^2-5xy+6y^2$. Resp.: $2x^3-11x^2y+17xy^2-6y^3$.

FRACCIONES.

104. *Fracción algébrica*, es una división planteada de modo que el dividendo (que toma el nombre de *Numerador*), esté arriba; y el divisor (que toma el de *Denominador*) esté debajo, así $\frac{2a^3}{3b^2}$.

105. Su valor puede considerarse de dos modos: ó igual al cociente de la división; ó igual á la recíproca del denominador multiplicada por el numerador. $\frac{a}{b}$ puede descomponerse en $\frac{1\times a}{b}=\left(\frac{1}{b}\right)\times a$.

106. En una fracción, puede considerarse la recíproca del denominador como una *unidad fraccional*, indicando entonces el numerador, las veces que la *unidad* fraccional ha de repetirse.

107. *Cantidad entera*, es una expresión algébrica en que no entra fracción. a^2-3b.

108. *Cantidad mixta*, es una expresión algébrica en que hay entero y fracción. $a^2+\frac{3a}{4b}$.

Principios Generales de las Fracciones.

109. Puesto que una fracción no es sino una división planteada de diferente modo, es evidente que todas las operaciones que con ellas se hacen deben basarse en los principios generales que existen entre el dividendo, divisor y cociente. Estos principios se refieren, primero al cambio de valor, y segundo, al cambio de signos.

1°. *Cambio de valor.*

110. Modificando el lenguaje del n° (85) podemos expresar las mutuas relaciones del numerador y denominador de una fracción, como sigue:

I. Multiplicando el numerador se multiplica la fracción, y dividiendo el numerador, se divide la fracción.

II. Multiplicando el denominador, se divide la fracción, y dividiendo el denominador, se multiplica la fracción.

III. Multiplicando y dividiendo numerador y denominador por una misma cantidad, no se altera el valor de la fracción.

2°. *Cambio de signos.*

111. *El Signo Aparente* de una fracción es el signo escrito delante de la línea divisoria para indicar si ha de sumarse ó restarse. Así:

$$y+\frac{a^2-ax^2}{4a-2x}.$$

El signo aparente de la fracción es $+$, luego indica que ha de sumarse.

112. *El Signo Real* de una fracción, es el signo de su valor numérico, una vez reducida á un monomio, y denota si la fracción es esencialmente positiva ó negativa. Así, siendo en la fracción anterior $a=2$, $x=3$, tendremos:

$$\frac{a^2-ax^2}{4a-2x}=\frac{4-18}{8-6}=\frac{-14}{2}=-7.$$

El signo *real* de esta fracción es *menos*, sin embargo de que su signo *aparente* es *más*.

113. Cada término del numerador y denominador tiene su propio signo, distinto del real y del aparente. Ahora bien, cambiando los signos de todos los términos de una cantidad entera, queda, cambiado su signo esencial; y de aquí.

I. *Cambiando todos los signos del numerador ó del denominador, cambia el signo real de la fracción.*

II. *Cambiando todos los signos del numerador y del denominador, no se altera el signo real de la fracción.*

III. *Cambiando el signo aparente de la fracción cambia el signo real.*

Reducción.

114. *Reducción* de una fracción es la operación de cambiar su forma sin que se altere su valor.

Caso I.

115. *Reducir una fracción á su menor expresión.*

Una fracción queda reducida á su menor expresión cuando su numerador y denominador son primos entre sí. Y puesto que no altera el valor de una fracción porque se suprima un mismo factor en numerador y denominador, tendremos:

Regla I.—*Descompónganse numerador y denominador en sus factores primos, y táchense los factores que son comunes.*

II. *Divídanse numerador y denominador por su máximo común divisor.*

EJEMPLOS.

1. Redúzcase $\frac{a^4-1}{a^5+a^3}$ á su menor expresión.

$$\frac{a^4-1}{a^5+a^3}=\frac{(a^2-1)(a^2+1)}{a^3(a^2+1)}=\frac{a^2-1}{a^3}.$$

2. Redúzcase $\frac{3a^2-2a-1}{4a^3-2a^2-3a+1}$ á su menor expresión.

El máximo común divisor es $a-1$. De donde, $(3a^2-2a-1)\div(a-1)=3a+1$.

$(4a^3-2a^2-3a+1)\div(a-1)=4a^2+2a-1$. La fracción reducida, será: $\frac{3a+1}{4a^2+2a-1}$.

3. $\frac{8a^4b^3c}{8a^2b^4c}$. Resp.: $\frac{a^2}{b}$.

4. $\frac{4a^2b}{8a^2b}$. Resp.: $\frac{1}{2}$.

5. $\frac{4a^2b^3}{6a^2b^5}$. Resp.: $\frac{2}{3b^2}$.

6. $\frac{3a^3b^6}{7a^3b^6}$. Resp.: $\frac{3}{7}$.

7. $\frac{4a^2b^2c^2}{2abc}$. Resp.: $2abc$.

8. $\frac{3a^2b^2c^2}{6a^3b^3c^3}$. Resp.: $\frac{1}{2abc}$.

9. $\frac{x^2-1}{xy+y}=\frac{(x-1)(x+1)}{y(x+1)}=$ Resp.: $\frac{x-1}{y}$. $=\frac{x-1}{y}$

10. $\frac{x^5-c^2x^3}{x^4-c^4}$. Resp.: $\frac{x^3}{x^2+c^2}$.

11. $\frac{a^3-ax^2}{a^2+2ax+x^2}$. Resp.: $\frac{a^2-ax}{a+x}$.

12. $\frac{2a^3-16a-6}{3a^3-24a-9}$. Resp.: $\frac{2}{3}$.

Caso II.

116. *Reducción de una fracción á cantidad entera ó mixta.*

La división indicada por la fracción puede efectuarse parcialmente á veces, cuando hay alguna parte en el numerador exactamente divisible por alguna parte del denominador. De aquí,

Regla I.—Divídase el numerador por el denominador hasta donde sea posible; el cociente será la cantidad entera.

II. Póngase el residuo después del entero, con su propio signo, y en forma de quebrados, teniendo por numerador el residuo y por denominador el de la fracción primitiva.

EJEMPLOS.

1. $\frac{ab+d}{b}$. Resp.: $a+\frac{d}{b}$.

2. $\frac{a^2+bx}{a}$. Resp.: $a+\frac{bx}{a}$.

3. $\frac{5ay+ab+y}{y}$. Resp.: $5a+1+\frac{ab}{y}$.

4. $\frac{2x^3-2y^3}{x-y}$. Resp.: $2(x^2+xy+y^2)$.

5. $\frac{x^5+y^5}{x-y}$. Resp.: $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+\frac{2y^5}{x-y}$.

6. $\frac{x^7-y^7}{x^3-y^3}$. Resp.: $x^4+xy^3+\frac{y^6}{x^2+xy+y^2}$.

Caso III.

117. *Reducir un mixto á fracción.*

Este caso es el reverso del anterior, y se resuelve:

Multiplicando el entero por el denominador de la fracción; al producto se agrega por suma el numerador, si el signo aparente es más; pero se resta si el signo aparente es menos, escribiendo el resultado encima del denominador.

EJEMPLOS.

1. $1+a+\frac{a^2}{b}$. Resp.: $\frac{b+ab+a^2}{b}$.

2. $2b-\frac{3x-a}{c}$. Resp.: $\frac{2bc-3x+a}{c}$.

3. $5a+\frac{ab+x}{b}$. Resp.: $\frac{6ab+x}{b}$.

4. $12+\frac{3a+b}{b}$. Resp.: $\frac{13b+3a}{b}$.

5. $5x-\frac{2x-5}{3}$. Resp.: $\frac{13x+5}{3}$.

6. $3a-9-\frac{3a^2-30}{a+3}$. Resp.: $\frac{3}{a+3}$.

7. $x+y+\frac{y^2}{x-y}$. Resp.: $\frac{x^2}{x-y}$.

Caso IV.

118. *Pasar un factor del denominador al numerador, ó al contrario.*

Sea la fracción $\frac{ab^m}{cy^n}$. Multiplicando numerador y denominador por y^{-n}, teniendo presente que un factor con exponente cero es igual á la unidad, y puede, por lo tanto, suprimirse, tendremos:

$$\frac{ab^my^{-n}}{cy^{n-n}}=\frac{ab^my^{-n}}{cy^0}=\frac{ab^my^{-n}}{c}.$$

El factor y^n del denominador ha pasado al numerador cambiando el signo de su exponente.

Sea la misma fracción $\frac{ab^m}{cy^n}$. Multiplicándola por b^{-m}, tendremos:

$$\frac{ab^{m-m}}{cy^nb^{-m}}=\frac{ab^0}{cy^nb^{-m}}=\frac{a}{cy^nb^{-m}}.$$

El factor b^m del numerador ha pasado al denominador, pero en la forma b^{-m}, cambiado el signo del exponente.

Por el mismo principio, se puede reducir á forma de entero una fracción. Así:

$$\frac{a^m}{y^n}=\frac{a^my^{-n}}{y^{n-n}}=\frac{a^my^{-n}}{y^0}=a^my^{-n}.$$

En operaciones de esta especie, pueden evitarse los procedimientos anteriores, y obtenerse el resultado por medio de las siguientes reglas:

I. Para pasar un factor del denominador al numerador, ó al contrario: cambiése el signo de su exponente.

II. Para reducir una fracción á forma de entero: pásense todos los factores del denominador al numerador, cambiando, los signos de sus exponentes.

EJEMPLOS.

1. $\frac{ab}{cd^2}$. Resp.: $\frac{abd^{-2}}{c}$.

2. $\frac{ab}{cd^2}$. Resp.: $abc^{-1}d^{-2}$.

3. $\frac{cb^3}{d}$. Resp.: $\frac{c}{db^{-3}}$.

4. $\frac{c^2b^3}{d}$. Resp.: $\frac{1}{dc^{-2}b^{-3}}$.

5. $\frac{ab}{cd}$. Resp.: $\frac{c^{-1}d^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$.

6. $\frac{d}{a(c-x)^2}$. Resp.: $\frac{d(c-x)^{-2}}{a}$.

7. $\frac{a(x-y)}{c(b-d)}$. Resp.: $\frac{a(b-d)^{-1}}{c(x-y)^{-1}}$.

CASO V.

119. *Reducir dos ó más fracciones á un común denominador.*

Para ello, se multiplica el numerador de cada fracción por los denominadores de los demás, menos por el suyo; los productos serán los nuevos numeradores; luégo se multiplican los denominadores entre sí, y el producto será el denominador común.

1.

$$\frac{2ab}{c}+\frac{3ab}{c^2d}+\frac{4ab}{5dx}$$
$$\frac{10abc^2d^2x+15acdx+4abc^3d}{5c^3d^2x}$$

2.

$$\frac{2a}{c}-\frac{3b}{d}+\frac{2c}{m}$$
$$\frac{2adm-3bcm+2c^2d}{cdm}$$

Pero este procedimiento tiene el inconveniente de que las fracciones aparecen con factores que pudieran suprimirse. Para evitar esto se seguirá otro procedimiento, menos sencillo, pero más adecuado.

Leonor Lee

Hemos visto que una fracción puede reducirse á su menor expresión por medio de la división. Al contrario, puede llevarse á su más alta expresión, por medio de la multiplicación, y cada uno de los más altos denominadores puede considerarse como un múltiplo del menor denominador. De aquí,

1°. Un común denominador á que pueden ser reducidas dos ó más fracciones, debe ser un múltiplo común de sus menores denominadores; y

2°. El menor común denominador de dos ó más fracciones, debe ser el *menor* común múltiplo de sus denominadores.

Sean las fracciones $\frac{a}{b^2c}$ y $\frac{d}{bc^3}$ para reducirlas á su menor común divisor.

Hallamos por la inspección que el menor común múltiplo de los denominadores dados es b^2c^3; y dividiéndolo por los denominadores, así:

$$b^2c^3 \div b^2c = c^2$$
$$b^2c^3 \div bc^3 = b$$

Si multiplicamos el numerador y denominador de la primera fracción por el primer cociente c^2; y los de la segunda, por el segundo cociente b, tendremos:

$a \times c^2 = ac^2$, nuevo numerador de la 1ª fracción.
$d \times b = db$, nuevo numerador de la 2ª fracción.

De aquí: $\frac{a}{b^2c}+\frac{d}{bc^3}=\frac{ac^2}{b^2c^3}+\frac{db}{b^2c^3}=\frac{ac^2+db}{b^2c^3}$.

Del procedimiento anterior se deducen las siguientes reglas:

I. Hallar el menor común múltiplo de todos los denominadores, y será el menor común denominador.

II. Dividir este menor común denominador por cada uno de los denominadores, y multiplicar cada numerador por el correspondiente cociente. Los productos serán los nuevos numeradores.

NOTA.—Los números mixtos se reducen primero á fracciones, y las fracciones á su menor expresión.

EJEMPLOS.

1. $\frac{2a}{x}$ y $\frac{3b}{2c}$. Resp.: $\frac{4ac}{2cx}, \frac{3bx}{2cx}$.

2. $\frac{2a}{b}$ y $\frac{3a+2b}{2c}$. Resp.: $\frac{4ac}{2bc}, \frac{3ab+2b^2}{2bc}$.

3. $\frac{5a}{3x}, \frac{3b}{2c}$, y 4d. Resp.: $\frac{10ac}{6cx}, \frac{9bx}{6cx}, \frac{24cdx}{6cx}$.

4. $a^2+\frac{a}{y}$, y $\frac{c}{ay-1}$. Resp.: $\frac{a^3y^2-a}{ay^2-y}, \frac{cy}{ay^2-y}$.

ADICIÓN.

120. Hemos visto que el valor de una fracción es igual á la recíproca de su denominador, multiplicada por el numerador. De modo que si dos ó más fracciones tienen un denominador común, tendrán también una unidad fraccional común, que puede constituirse en unidad de adición. Así,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{1}{b}\times a+\frac{1}{b}\times c=\frac{1}{b}\times(a+c)=\frac{a+c}{b}.$$

Ó de otro modo,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=ab^{-1}+cb^{-1}=(a+c)b^{-1}=\frac{a+c}{b}.$$

Puede omitirse el procedimiento anterior, siguiendo estas tres reglas:

1ª. En fracciones de igual denominador, súmense sus numeradores, y á la suma póngasele por denominador el común.

2ª. En fracciones de distinto denominador, redúzcanse primero á su menor común denominador, y luégo procédase conforme á la regla anterior.

3ª. Si las cantidades son mixtas, redúzcanse á la forma de fracciones, y luégo opérese como en los casos anteriores. También se puede sumar aparte los enteros, y las fracciones.

EJEMPLOS.

1. $\frac{2a}{4}+\frac{3a}{3}+\frac{a}{5}$. Resp.: $\frac{30a+60a+12a}{60}=\frac{102a}{60}$.

2. $\frac{a}{b}+\frac{a+b}{c}$. Resp.: $\frac{ac+ab+b^2}{bc}$.

3. $\frac{a^2}{3}+\frac{a^2+x^2}{a+x}$. Resp.: $\frac{a^3+a^2x+3a^2+3x^2}{3(a+x)}$.

4. $2a+\frac{a+3}{5}$ y $4a+\frac{2a-5}{4}$. Resp.: $6a+\frac{14a-13}{20}$.

5. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}$. Resp.: $\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$.

6. $\frac{a}{a+c}+\frac{2c}{a-c}+\frac{c}{a+c}$. Resp.: $\frac{a+c}{a-c}$.

SUSTRACCIÓN.

121. Si dos fracciones tienen un común denominador, tendrán una misma unidad fraccional; y la una puede restarse de la otra, restando sus numeradores.

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{1}{c}\times a-\frac{1}{c}\times b=\frac{1}{c}\times(a-b)=\frac{a-b}{c}.$$

Ó de otro modo,

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=ac^{-1}-bc^{-1}=(a-b)c^{-1}=\frac{a-b}{c}.$$

De aquí las siguientes reglas:

1ª. En fracciones que tienen igual denominador, se restarán sus numeradores, poniéndole al resultado por denominador, el común.

2ª. En fracciones que tienen distintos denominadores, se reducen á su menor común denominador, y luégo se opera como en el caso anterior.

3ª. Si las cantidades son mixtas redúzcanse á la forma de fracciones, y luégo opérese como en los casos anteriores. También se pueden restar aparte los enteros, y las fracciones.

EJEMPLOS.

1. $\frac{4a^2}{c}-\left(\frac{2a^2}{c}\right)$. Resp. : $\frac{2a^2}{c}$.
2. $\frac{3x}{7}-\left(\frac{2x}{9}\right)$. Resp. : $\frac{13x}{63}$.
3. $\frac{1}{x-y}-\left(\frac{1}{x+y}\right)$. Resp. : $\frac{2y}{x^2-y^2}$.
4. $3a+\frac{11a-10}{15}-\left(2a+\frac{3a-5}{7}\right)$. Resp. : $=a+\frac{32a+5}{105}$.
5. $\frac{a+b}{a-b}-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$. Resp. : $\frac{4ab}{a^2-b^2}$.
6. $x+\frac{x-y}{x^2+xy}-\left(\frac{x+y}{x^2-xy}\right)$. Resp. : $x-\frac{4y}{x^2-y^2}$.

MULTIPLICACIÓN.

122. Puede haber tres casos de multiplicación, y para ellas las tres reglas siguientes :

1ª. Si es fracción por fracción, multiplíquense los numeradores unos por otros, y el producto será el nuevo numerador ; multiplíquense los denominadores unos por otros, y el producto será el nuevo denominador.

$$\frac{2a}{b}\times\frac{3b}{c}\times\frac{d}{m}=\frac{6abd}{bcm}.$$

2ª. Si es entero por fracción, póngase el entero en forma de fracción (poniéndole por denominador la unidad), y luégo opérese como fracción por fracción.

$$a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

3ª. Si hay mixto, redúzcase á la especie de su fracción, y opérese como fracción por fracción.

$$a+\frac{b}{c}\times\frac{d}{m}=\frac{ac+b}{c}\times\frac{d}{m}=\frac{acd+bd}{cm}.$$

EJEMPLOS.

1. $\frac{a}{b}$ por $\frac{b}{x}$. Resp. : $\frac{a}{x}$.
2. $\frac{a+x}{30}$ por $\frac{5a}{3(a+x)}$. Resp. : $\frac{a}{18}$.
3. $\frac{2x+3y}{2a}$ por $\frac{2a}{5x}$. Resp. : $\frac{2x+3y}{5x}$.
4. $4a$ por $\frac{2b+c}{d}$. Resp. : $\frac{8ab+4ac}{d}$.
5. $2a+\frac{3b+c}{d}$ por a. Resp. : $2a^2+\frac{3ab+ac}{d}$.
6. $\frac{a+x}{30}$ por $\frac{5a}{3(a+x)}$. Resp. : $\frac{a}{18}$.
7. $\frac{x^2-b^2}{bc}$, $\frac{x^2+b^2}{b+c}$, y $\frac{bc}{x-b}$. Resp. : $\frac{(x+b)(x^2+b^2)}{b+c}$.
8. $\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{a-b-c}$ por $\frac{c+b-a}{(c-b-a)(b-c-a)}$. Resp.: -1.

DIVISIÓN.

123. Del siguiente ejemplo deduciremos la regla general para la división de las fracciones.

Divídase $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$.

OPERACIÓN.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=ab^{-1}\div cd^{-1}=\frac{ab^{-1}}{cd^{-1}}=\frac{ad}{bc}.$$

Examinando el resultado anterior se ve que el nuevo numerador se obtiene multiplicando el numerador del dividendo por el denominador del divisor ; y el nuevo denominador, multiplicando el denominador del dividendo por el numerador del divisor ; ó lo que es lo mismo, multiplicando en cruz ; ó si se quiere, invirtiendo los términos del denominador, y luégo procediendo como en la multiplicación de fracciones. De aquí,

REGLA I.—*Redúzcanse el entero y mixto á la forma de fracción.*

REGLA II.—*Inviértanse los términos del divisor; y procédase como en la multiplicación de fracciones.*

EJEMPLOS.

1. $a \div \frac{c}{d}$; invirtiendo $\frac{a}{1} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$.

2. $\frac{c}{d} \div a$, $\frac{c}{d} \div \frac{a}{1}$; invirtiendo $\frac{c}{d} \times \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$.

3. $a + \frac{c}{d} \div \frac{m}{n}$; $\frac{ad+c}{d} \times \frac{n}{m} = \frac{adn+cn}{dm}$.

4. $\frac{a+b}{c} \div \frac{c}{a+b}$. Resp.: $\frac{(a+b)^2}{c^2}$.

5. $\frac{3ab}{c} \div \frac{4a}{3b}$. Resp.: $\frac{9ab^2}{4ac}$.

6. $\frac{9x^2-3x}{5} \div \frac{x^2}{5}$. Resp.: $\frac{9x-3}{x}$.

7. $\frac{na-nx}{a+b} \div \frac{ma-mx}{a+b}$. Resp.: $\frac{n}{m}$.

8. $\frac{3(x^2-1)}{2(a+b)} \div \left(\frac{x+1}{2a}\right)\left(\frac{x-1}{a+b}\right)$. Resp.: 3a.

9. $\frac{a^2}{x^3} + \frac{1}{a} \div \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{a}$. Resp.: $\frac{a+x}{x}$.

10. $\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} \div 1$. Resp.: $3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Reducción de Fracciones Complexas.

124. Llámase fracción *simple* la que tiene numerador y denominador enteros; y *complexa*, la que los tiene de otro modo.

125. Para reducir á simple una fracción complexa debemos considerar como dividendo á la fracción que está sobre la línea, y como divisor á la que está debajo, así:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}.$$

Haciendo la división quedaría reducida á simple la complexa:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Pero hay otro método para efectuarlo, que se deduce de las dos siguientes observaciones:

1ª. Si se multiplica una fracción por su denominador, el producto será entero:

$$\frac{a}{b} \times b = \frac{ab}{b} = a.$$

2ª. Si se multiplica una fracción por cualquier múltiplo de su denominador, el producto será entero:

$$\frac{a}{b} \times bc = \frac{abc}{b} = ac.$$

De aquí, la siguiente regla para reducir á simple una fracción complexa:

Multiplíquense los numeradores de dividendo y divisor por el menor múltiplo común de los denominadores de ambos.

1. Simplifíquese $\frac{a+\frac{b}{c}}{a+\frac{c}{b}}$.

Reduciendo los mixtos á quebrado dará:

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{a+\frac{c}{b}} = \frac{\frac{ac+b}{c}}{\frac{ab+c}{b}}.$$

El menor múltiplo común de los denominadores *c* y *b*, es bc. Multiplíquense por él los numeradores de dividendo y divisor, y se tendrá :

$$\frac{\frac{(ac+b)\times bc}{c}}{\frac{(ab+c)\times bc}{c}}=\frac{\frac{abc^2+b^2c}{c}}{\frac{ab^2c+bc^2}{b}}=\frac{\frac{c(abc+b^2)}{c}}{\frac{b(abc+c^2)}{b}}=\frac{abc+b^2}{abc+c^2}.$$

2. Simplifíquese $\dfrac{\frac{a^2}{bc^2}+\frac{b^2}{a^2c}}{\frac{a^2}{b^2c}+\frac{b^2}{ac^2}}$. Resp. : $\dfrac{a^4b+b^4c}{a^4c+b^4a}$.

3. Simplifíquese $\dfrac{\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}}{\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}}$. Resp.: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$.

4. Simplifíquese $\dfrac{\frac{a+b}{c+d}+\frac{a-b}{c-d}}{\frac{a+b}{c-d}+\frac{a-b}{c+d}}$. Resp. : $\dfrac{ac-bd}{ac+bd}$.

SECCIÓN II.

ECUACIONES.

126. *Ecuación* es una expresión de igualdad entre dos cantidades : $x+y=a$.

127. Llámase *Primer Miembro* de una ecuación, la cantidad que está á la izquierda del signo $=$; y *Segundo Miembro*, la que está á la derecha. Así $x+y$ es el primer miembro, y *a* el segundo en la ecuación anterior.

128. *Ecuación Numérica*, es aquella en que todas las cantidades conocidas están representadas por números, como : $3y^3-y^2+2y=17$.

129. *Ecuación Literal*, es aquella en que alguna ó todas las cantidades conocidas están representadas por letras, como : $ay^2-3by=5d$.

130. *Ecuación Idéntica*, es aquella en que aparecen los dos miembros con una misma forma, ó con formas convertibles á una misma forma.

$$a^2-3x=a^2-3x.$$
$$y^2-a^2=(y+a)(y-a).$$

131. Las ecuaciones pueden ser de diferentes grados ó dimensiones.

El *Grado* de una ecuación es denotado por el mayor número de factores desconocidos, ó incógnitas que ocurren en alguno de los términos.

De aquí,

1°. Si una ecuación no envuelve sino una incógnita, su grado es denotado por el mayor exponente de esa incógnita en cualquier término.

2°. Si hay más de una incógnita, el grado de la ecuación será expresado por la mayor suma que puedan dar los exponentes de las incógnitas en algún término. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+ax=b \\ ax+y=c^2 \end{array}\right\} \text{son ecuaciones de primer grado.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+4x=8 \\ x^2+xy=a^2b \end{array}\right\} \text{son de segundo grado.}$$

Transformación de las Ecuaciones.

132. Transformación de una ecuación es el procedimiento de cambiar su forma sin destruir la igualdad de sus miembros.

Todas las operaciones que pueden hacerse en una ecuación sin destruir su igualdad, están comprendidas en seis de los axiomas (35), que podremos expresar así:

1. A ambos miembros puede agregárseles por suma una misma cantidad ó cantidades iguales (Ax. 1).
2. De ambos miembros puede restarse una misma cantidad ó cantidades iguales (Ax. 2).
3. Ambos miembros pueden multiplicarse por una misma cantidad, ó cantidades iguales (Ax. 3).
4. Ambos miembros pueden dividirse por una misma cantidad ó cantidades iguales (Ax. 4).
5. Ambos miembros pueden elevarse á una misma potencia (Ax. 8.).
6. A ambos miembros puede extraérseles una misma raiz (Ax. 9).

Caso I.

133. *Transposición de los términos de una ecuación.*

Transposición es el procedimiento de cambiar un término de un miembro á otro sin que se destruya la igualdad. Para exhibir la ley de la transposición basta considerar los tres ejemplos siguientes:

1°. Sea $x+a=b$.

Si restamos a de ambos miembros tendremos:

$$x+a-a=b-a,\ x=b-a.$$

Lo que es lo mismo que quitar el $+a$ del primer miembro y hacerlo aparecer como $-a$ en el segundo.

2°. Sea $x-a=b$.

Si agregamos $+a$ á ambos miembros, tendremos:

$$x-a+a=b+a,\ \text{ó}\ x=b+a.$$

Lo que equivale á quitar $-a$ del primer miembro y hacerlo aparecer como $+a$ en el segundo.

3°. Sea $a-x=b$.

Restando a de ambos miembros, tendremos:

$$a-a-x=b-a,\ \text{ó}\ -x=b-a.$$

Y multiplicando ambos miembros por -1, tendremos:

$$-1(-x=b-a),\ \text{ó}\ x=a-b.$$

Comparando ahora este resultado con la ecuación propuesta, observamos que $+a$ se ha pasado del primer miembro al segundo, pero cambiados los signos en ambos miembros.

De aquí, las siguientes reglas para el cambio de signos, ó de lugar de un término cualquiera:

Regla I.—Un término puede pasarse de un miembro á otro cambiándole el signo (1, 2).

II. Un término puede transponerse sin cambiar su signo, con tal que se cambien los signos de todos los términos (3).

III. Puede cambiarse el signo de un término sin transposición, con tal que se cambien los signos de todos los términos (3).

EJEMPLOS.

Pasar al primer miembro las incógnitas, y al segundo los términos conocidos.

1. $a^2x+bc=ab-2ax$. Resp.: $a^2x+2ax=ab-bc$.
2. $3b^2-2x-5=3c-5ax-dx$. Resp.: $5ax+dx-2x=3c-3b^2+5$.
3. $4c^2x-a+3b=x-ab-2cx$. Resp.: $4c^2x-x+2cx=a-3b-ab$.
4. $5ab^2-x+4cd=ax-cx+a^2$. Resp.: $cx-ax-x=a^2-5ab^2-4cd$.
5. $ax+bc=a^2+c^2x$. Resp.: $c^2x-ax=bc-a^2$.
6. $a^2-c^2x-3dx=c^2d^2x-5b^2$. Resp.: $c^2d^2x+c^2x+3dx=a^2+5b^2$.

Caso II.

Eliminación de fracciones en una ecuación.

134. Ya se ha visto que si se multiplica el numerador de una fracción por cualquier múltiplo de su denominador, el producto será entero; y por consiguiente, si se multiplican varias fracciones por un múltiplo común de sus denominadores, todos los productos serán enteros.

Sea ahora la ecuación

$$\frac{3x}{10}-\frac{2x}{15}=12.$$

Multiplicando cada término por 30, que es el menor múltiplo común de los denominadores, tendremos: $\frac{90x}{10}-\frac{60x}{15}=360$, ó $9x-4x=360$, en que todos los términos son enteros.

Sea esta otra ecuación

$$\frac{x}{a^2}-\frac{x-c}{ab^2}=\frac{x+c}{a^2b}.$$

Multiplicando cada término por a^2b^2 que es el menor múltiplo común de los denominadores, y observando que el producto obtenido del segundo término del primer miembro debe restarse, y por consiguiente cambiársele los signos, tendremos: $\frac{a^2b^2x}{a^2}-\frac{a^2b^2x-a^2b^2c}{ab^2}=\frac{a^2b^2x+a^2b^2c}{a^2b}$, ó $b^2x-ax+ac=bx+bc$.

De aquí, la siguiente

Regla.—*Multiplíquense todos los términos de la ecuación por el menor múltiplo común de los denominadores, observando que cuando una fracción tiene el signo menos, deben cambiarse los signos de los productos que resulten de su numerador.*

Notas.—1ª. Al multiplicar cada fracción, podría dividirse primero el menor múltiplo común por el denominador de cada fracción y luégo multiplicar por el cociente, el respectivo numerador.

2ª. También podría hacerse multiplicando cada numerador por el producto de los denominadores de las demás fracciones.

EJEMPLOS.

Eliminar las fracciones en las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}=10.$ Resp.: $6x+8x-9x=120.$

2. $\frac{3x}{7}-\frac{2x+3}{14}=\frac{x-5}{21}.$ Resp.: $18x-6x-9=2x-10.$

3. $\frac{a}{x-a}+\frac{c}{x+a}=\frac{d}{x^2-a^2}.$ Resp.: $ax+a^2+cx-ac=d.$

4. $\frac{x-a}{c}-\frac{2x-3a}{ac^2}=\frac{x+ac}{a^2}.$ Resp.: $a^2cx-a^3c-2ax+3a^2=c^2x+ac^3.$

5. $\frac{5x}{12}-\frac{3x}{16}+\frac{3-x}{24}=2.$ Resp.: $20x-9x+6-2x=96.$

6. $\frac{1}{abc}=\frac{a}{bcx}+\frac{b}{acx}+\frac{c}{abx}.$ Resp.: $x=a^2+b^2+c^2.$

Despejo de las incógnitas.

135. *Despejar* una incógnita es dejarla sola en el primer miembro sin más coeficiente y exponente que la unidad, y sin divisor.

Sea la ecuación $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-7}{4}=4+\frac{5x}{6}.$

Eliminando las fracciones, con la multiplicación de los numeradores y enteros por 12 que es el menor múltiplo común de los denominadores, se tendrá:

$$20x-8-3x+21=48+10x.$$

Transponiendo: $20x-3x-10x=48+8-21.$

Sumando términos semejantes: $7x=35.$

Dividiendo ambos miembros por 7, ó pasando dicho número como divisor al segundo miembro, así: $x=\frac{35}{7}$, $x=5.$

Comprobación : $\frac{5\times5-2}{3}-\frac{5-7}{4}=4+\frac{25}{6}$, ó $\frac{23}{3}-\frac{-2}{4}$ $=4+\frac{25}{6}$, ó $7\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=4+4\frac{1}{6}$, ó $8\frac{1}{6}=8\frac{1}{6}$.

EJEMPLOS.

1. $7x-16=3x-4$. Resp. : $x=3$.
2. $3x+9=5x+1$. Resp. : $x=4$.
3. $4x+7=x+21-3+x$. Resp. : $x=5\frac{1}{2}$.
4. $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=10$. Resp. : $x=24$.
6. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{6}+3$. Resp. : $x=1$.
7. $\frac{x+a}{b}-\frac{x}{a}=1$. Resp. : $x=-a$.
8. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=6$. Resp. : $x=11$.
9. $\frac{3x-1}{7}+\frac{6-x}{4}-\frac{2x-4}{12}=\frac{54-x}{28}$. Resp. : $x=5$.
10. $\frac{a+c}{a+x}+\frac{a-c}{a-x}=\frac{2b^2}{a^2-x^2}$. Resp. : $x=\frac{a^2-b^2}{c}$.
11. $10\left(x+\frac{1}{2}\right)-6x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)=23$. Resp. : $x=2$.
12. $\frac{1}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}-x\right)=\frac{43}{30}$. Resp. : $x=\frac{43}{9}$.

PROBLEMAS.

136. *Problema* es una cuestión propuesta que requiere solución.

137. *Solución* de un problema es la operación de hallar una ó varias cantidades que satisfagan á las condiciones dadas.

138. La solución de un problema consta de tres partes que son : Notación, Planteo y Solución de la ecuación.

139. La *Notación* consiste en convertir las condiciones del problema en lenguaje algébrico.

140. El *Planteo* consiste en convertir la notación en ecuación.

141. La *solución de la ecuación* consiste en hacer las operaciones conducentes hasta hallar el valor de las incógnitas.

142. Un ejemplo aclarará mejor las tres operaciones que exige la solución de cualquier problema.

Sea el siguiente problema : Un padre tiene 49 años ; su hijo 11. Se pregunta : ¿En cuánto tiempo será la edad del padre triple de la del hijo ?

Notación.—Sea x los años que han de trascurrir.

Al fin de ellos la edad del padre será. $49+x$
La del hijo será.................. $11+x$
Pero entonces la del padre será triple de la del hijo, luego para poderlas igualar hay, ó que dividir la del padre por 3.................. $\frac{49+x}{3}$
Ó que multiplicar la del hijo por 3... $(11+x)3$

Planteo.—Puede hacerse de dos modos :

$$\frac{49+x}{3}=11+x,$$
$$\text{ó } 49+x=3(11+x).$$

Solución de la ecuación.—De la primera : $\frac{49+x}{3}=11+x$; ó $49+x=33+3x$; $-3x+x=33-49$; $-2x=-16$; $x=\frac{16}{2}$; $x=8$.

De la segunda : $49+x=3(11+x)$; $49+x=33+3x$; $-3x+x=33-49$; $x=8$.

Basta una solución, pero hemos querido hacer notar que á un problema puede dársele más de un planteo.

Comprobación.—Si $x=8$, sustituyendo este valor, por ejemplo en la segunda ecuación tendremos: $49+8=3(11+8)$; $57=57$.

Ecuaciones de 1r Grado con una incógnita.

Problemas.

1.

Dos pilas de balas contienen juntas 496 balas: en una pila hay 64 balas más que en la otra. ¿Cuántas balas hay en cada pila?

Admite dos notaciones y planteos.

1°. x, la menor; y $x+64$ la mayor.
Súmense: $x+x+64=496$; ó $x=\frac{496-64}{2}$; $x=216$.

2°. x, la mayor; y $x-64$ la menor.
Súmense: $x+x-64=496$; $2x=496+64$; $x=280$.

2.

Tres bultos de mercancías pesan juntos 143 kilogramos: el de zarazas pesa 22 kil. más que el de platillas; y éste 29 kil. más que el de pañuelos. ¿Cuánto pesa cada uno?

Admite tres notaciones y planteos.

1°. x, el de pañuelos que pesa menos.
$x+29$, el de platillas, peso medio.
$x+29+22$, el de zarazas que pesa más: $x+x+29+x+29+22=143$; $x=21$.

2°. x, el de platillas.
$x-29$, el de pañuelos.
$x+22$, el de zarazas: $x+x-29+x+22=143$; $x=50$.

3°. x, el de zarazas.
$x-22$, el de platillas.
$x-22-29$, el de pañuelos: $x+x-22+x-22-29=143$; $x=72$.

3.

Repartir 21,375 cartuchos entre tres destacamentos, cuyos soldados están en la relación de 3, 5, 11, ó lo que es lo mismo, el 1° es $\frac{3}{5}$ del 2°; y éste $\frac{3}{11}$ del 3°. ¿Cuántos cartuchos tocan á cada destacamento?

Admite 4 notaciones y planteos: $21,375=a$.

1°. x, cartuchos del menor destacamente, ó 1°
$\frac{5}{3}x$, cartuchos del 2°.
$\frac{11}{3}x$, cartuchos del 3°. Súmense: $x+\frac{5}{3}x+\frac{11x}{3}=a$, etc.

2°. x, cartuchos del 2°.
$\frac{3x}{5}$, cartuchos del 1°.
$\frac{11x}{5}$, cartuchos del 3°. Súmense: $x+\frac{3x}{5}+\frac{11x}{5}=a$, etc.

3°. x, cartuchos del 3°.
$\frac{5x}{11}$, cartuchos del 2°.
$\frac{3x}{11}$, cartuchos del 1°. Súmense: $x+\frac{5x}{11}+\frac{3x}{11}=a$, etc.

4°. Sea x un determinado número de cartuchos,

y tocarán $\begin{cases} 3x, \text{ al } 1°. \\ 5x, \text{ al } 2°. \\ 11x, \text{ al } 3°. \end{cases}$ Súmense: $3x+5x+11x=a$;

ó $19x=a$; $x=\frac{a}{19}$; $x=21,375 \mid 19$
$1,125$, el n° de cartuchos.

$$\text{Luégo} \begin{cases} 3x=3\times1,125=3,375 \\ 5x=5\times1,125=5,625 \\ 11x=11\times1,125=12,375 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 21,375 \end{cases}$$

4.

Parten dos correos, uno de París y otro de Fontainebleau; ambos van á Lyon siguiendo el mismo camino. El de París sale 3 horas antes que el otro. Este camina 9 kilómetros por hora; y el de París, 12 kilómetros. La distancia de París á Fontainebleau es de 60 kilómetros. ¿A cuántas horas y á qué distancia de Fontainebleau se encontrarán?

Es evidente que la distancia P E que recorre el de París es igual á la suma de las distancias P F y F E.

Admite dos notaciones y planteos.

1°. Sea x, horas del de París, y correrá 12x kilómetros.

x−3 horas del de Fontainebleau, y correrá 9(x−3) kilómetros.

Tendremos: $12x=9x-27+60$.

$12x-9x=-27+60$; $3x=33$; $x=11$ horas.

Si el de París ha empleado 11 horas, el de Fontainebleau empleará $11-3=8$ horas.

Kilómetros andados. { El de París: $12x=12\times11=132$.
El de Fontainebleau: $9x=9\times8=72$.

2°. Sea x las horas del de Fontainebleau, y 9x serán las kilómetros recorridos.

x+3 las horas del de París, y 12(x+3) ó 12x+36 los kilómetros que le corresponde.

$$9x+60=12x+36;$$

$$\text{ó } 9x-12x=36-60;\ -3x=-24;\ x=8 \text{ horas.}$$

5.

Los correos van en dirección opuesta. El uno parte de París para Fontainebleau, y el otro de aquí para París. El de Fontainebleau sale 2 horas antes. Hay, como se ha dicho, 60 kilómetros de una á otra ciudad. ¿A cuánto tiempo y dónde se encontrarán?

Admite también dos notaciones y planteos.

1°. { x, horas del de París, y 12x kilómetros.
x+2, horas del de Fontainebleau, y 9(x+2) ó 9x+18 kilómetros.

Entre los dos andarán todo el camino ó los 60 kilómetros.

$$12x+9x+18=60.$$

$$21x=60-18;\ x=2 \text{ horas.}$$

2°. { x, horas del de Fontainebleau, y 9x kilómetros.
x−2, horas del de París, y 12(x−2) kilómetros, etc.

6.

Hallar todos los instantes en que se encuentran en un reloj el minutero y el horario.

Es evidente que se encuentran á las 12. El minutero camina doce veces más que el horario. La circunferencia de la muestra del reloj se divide en 60 minutos ó en 12 espacios, cada uno de 5 minutos, que se llaman horas.

Admite dos notaciones y planteos.

1°. Sea x lo que andará el horario hasta el primer encuentro después de las 12. Lo que andará el minutero será 12x, que es toda la circunferencia (que representaremos con c), y además lo que ha caminado el horario.

$$12x=c+x;\ \text{ó } 11x=c;\ \text{ó } x=\frac{c}{11}.$$

$$\text{Si } c=\begin{cases}12, \text{ será } \dfrac{12}{11}=1+\frac{1}{11} \text{ de 5 minutos.}\\[2ex] 60, \text{ será } \dfrac{60}{11}=5+\frac{5}{11} \text{ de minuto } =1+\frac{1}{11} \text{ de 5 minutos.}\end{cases}$$

Se encontrarán á $1\frac{1}{11}$, á $2\frac{2}{11}$, $3\frac{3}{11}$, $4\frac{4}{11}$, $5\frac{5}{11}$, $6\frac{6}{11}$, $7\frac{7}{11}$, $8\frac{8}{11}$, $9\frac{9}{11}$, $10\frac{10}{11}$, $11\frac{11}{11}$, ó á las 12. Serán pues once los encuentros.

2°. { x, lo que anda el minutero.
$\frac{x}{12}$, lo que anda el horario.

$$x=\frac{x}{12}+c;\ 12x=x+12c;\ 11x=12c.$$

$x=\frac{12c}{11}$; $x=\frac{12\times12}{11}$; $x=13\frac{1}{11}$ espacios de hora á hora;

ó también: $x=\frac{12c}{11}$; $x=\frac{12\times60}{11}$; $x=65+\frac{5}{11}$ de minutos.

7.

La suma de los diámetros de dos balas de cañones de á 36 y 24, es de 315 milímetros; su diferencia es de 21 milímetros. ¿Cuál es el diámetro de cada una?

1°. x el de la de á 36.
x—21 el de la de á 24.
x+x—21=315, etc.

Resp.: 168 la de á 36.
147 la de á 24.

8.

Un empresario compró leña y luégo la vendió ganando 2,000 francos. En este negocio ha ganado $\frac{10}{100}$ del total en que la vendió. ¿En cuánto la compraría?

Resp.: 18,000 francos.

9.

Un sastre promete á su dependiente 200 francos por año y un vestido. Solo trabajó diez meses y le dió 160 francos y el vestido. ¿Cuánto valía este?

Resp.: 40 francos.

10.

Ajustóse un obrero para trabajar 48 días; de modo que cada día que trabaje gana 24 francos, y cada día que descanse, paga 12 francos por su mantención. Ajustadas las cuentas al cabo de los 48 días, resulta que ha ganado 504 francos. ¿Cuántos días trabajó y cuántos no? Resp.: Trabajó 30 y descansó 18 días.

11.

Hay 20 botellas de vino á 12 francos botella, y también vino de á 7 francos botella. Se quiere saber cuántas del de á 7 francos habrá que agregar á las 20 botellas del de á 12 francos para que se pueda vender á 9 francos cada botella de mezcla. Resp.: 30 botellas.

12.

Hay dos fuentes; corriendo sola la primera llena un recipiente en $1\frac{1}{2}$ hora; la segunda lo llena sola, en 2 horas y $\frac{1}{4}$. Se pregunta en cuánto tiempo lo llenarán corriendo ambas á la vez.

Notación y planteo.—Sea x el tiempo que emplean las dos; $a=1\frac{1}{2}$; $b=2\frac{1}{4}$.

$\frac{x}{a}$ será la parte del recipiente que llena la 1ª.

$\frac{x}{b}$ la parte que llena la 2ª.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1, \text{ capacidad del recipiente};$$

$$\text{ó } bx+ax=ab;\ (b+a)x=ab;\ x=\frac{ab}{a+b}.$$

Y sustituyendo los valores de las letras:

$$\frac{ab}{a+b}=\frac{1\frac{1}{2}\times2\frac{1}{4}}{2\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\times\frac{9}{4}\div\frac{9}{4}+\frac{6}{4}=\frac{27}{8}\div\frac{15}{4}=\frac{27}{2}\div15=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}.$$

$$x=\frac{9}{10} \text{ de hora.}$$

Y valuando el quebrado en minutos: $\frac{9}{10}\times60=54$ minutos.

13.

¿Cuál es el número que aumentado con su mitad, tercera y cuarta parte, es igual á 250? Resp.: 120.

14.

La suma de dos números es 75; su difere rra dará igual á $\frac{1}{3}$ del mayor. ¿Cuáles son estos número orel.

Resp.:

15.

Pagué primero $\frac{1}{3}$ del dinero que tenía, lo que me quedaba, y por fin se me perdió me había quedado, pero conservé \$24. +63x; tenía al principio?

16.

¿Cuál es el número que quitándole 5, deja un residuo cuyos $\frac{2}{3}$ son 40? Resp.: 65.

17.

Un hombre ha comprado un caballo y un reloj por \$200, y $\frac{1}{2}$ del valor del caballo es igual á $\frac{1}{3}$ del precio del reloj. ¿Cuál es el precio de cada cosa?

Resp.: Caballo, \$80; reloj, \$120.

18.

En la composición de una cantidad de pólvora, el nitro era 10 libras más que los $\frac{2}{3}$ del todo, el azufre era $4\frac{1}{2}$ libras menos que $\frac{1}{6}$ del todo, y el carbón 2 libras menos que $\frac{1}{7}$ del nitro. ¿Cuántas libras de pólvora eran?

Resp.: 69 libras.

19.

Cuatro lugares están situados en el orden de las letras A, B, C, D. La distancia de A á D es de 34 millas; la de A á B es á la distancia de C á D como 2 es á 3; y $\frac{1}{4}$ de la distancia de A á B agregado á la mitad de la distancia de C á D, es tres veces la que hay de B á C. ¿Cuáles son las distancias respectivas?

Resp.: 12, 4 y 18 millas.

20.

Diez años hace, la edad de un joven era $\frac{1}{10}$ de la de su padre; ahora es sólo $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la edad actual del padre? Resp.: 60 años.

21.

Divídase una cantidad de dinero entre A, B y C, de modo que A tenga \$8, B tanto como A más $\frac{1}{5}$ de lo que
no?
C, y C tanto como A y B juntos. ¿Cuánto le
C? Resp.: \$20.

22.

Hay 20
bién vino de acción naval $\frac{1}{3}$ de los buques fueron tomados
tas del de á 7 igo, $\frac{1}{6}$ fué echado á pique, y 2 quemados; $\frac{1}{7}$
del de á 12 fra ntes pereció después en una tempestad, y
cada botella de mezc. buques. ¿Cuántos eran los buques de

Resp.: 60.

23.

Hay una fuente que llena un recipiente en 70 minutos, y otra que lo llena en 80. Deséase saber en cuanto tiempo lo llenarán corriendo ambas?

Resp.: En $37\frac{1}{3}$ minutos.

24.

He prestado una cantidad de dinero al $6\frac{1}{2}$ por ciento. Al cabo de un año capital é intereses montarán á 1,917 pesos. ¿Cuánto fué el capital prestado?

Resp.: \$1,800.

25.

Dividir el número 240 en dos partes tales que 7 veces la primera sea igual á 5 veces la segunda.

Resp.: 100 y 140.

26.

Dividir 21,000 pesos entre A, B, C y D, de modo que la parte de A, sea $\frac{2}{3}$ de la de B, ésta $\frac{4}{5}$ de la de C, y ésta $\frac{6}{7}$ de la de D. ¿Cuántos pesos tocan á cada uno?

Resp.: A, 3,200; B, 4,800; C, 6,000; D, 7,000.

27.

Un lebrel persigue á una zorra que le lleva 60 saltos de ventaja. La zorra dá 9 saltos mientras que el lebrel dá 6; pero cada 3 saltos del lebrel equivalen á 7 saltos de la zorra. ¿Cuántos saltos tendrá que dar el lebrel para alcanzarla?

Sea x el número de saltos del lebrel. Como 7 saltos de la zorra equivalen á 3 saltos del lebrel, 1 de la zorra será $\frac{3}{7}$ de 1 del lebrel; y 60 de la zorra valdrán $60\times\frac{3}{7}$ del lebrel. Como mientras el lebrel dá 6, la zorra dá 9, es claro que mientras el lebrel dá x saltos, la zorra dará $\frac{9x}{6}$, ó $\frac{3x}{2}$ que equivale á $\frac{3x}{2}\times\frac{3}{7}$ de saltos del lebrel.

Luego, $x=60\times\frac{3}{7}+\frac{3x}{2}\times\frac{3}{7}$;

$$ó\ x=\frac{180}{7}+\frac{9x}{14};\ ó\ 98x=2520+63x;$$

ó $98x-63x=2520$; $35x=2520$; $x=72$ saltos del lebrel.

Y como 7 de la zorra equivalen á 3 del lebrel, los de la zorra serán: $72\times\frac{7}{3}=168$.

28.

Un recipiente que está lleno de agua puede vaciarse por 2 llaves de magnitudes diferentes; se abre una llave y se deja derramar la cuarta parte del agua; luégo se abre la otra llave, se deja derramar el agua por ambas llaves y el recipiente acaba de vaciarse gastándose para ello $\frac{5}{4}$ de hora más del tiempo que se necesitó para que la primer llave vaciara la cuarta parte del agua. Si se hubieran abierto las dos llaves desde el principio, el recipiente se habría vaciado $\frac{1}{4}$ de hora antes. Se pregunta, ¿en cuánto tiempo vaciaría la primera llave sola, el recipiente? Resp.: En 4 horas.

Ecuaciones de 1r Grado con dos incógnitas.

143. En los problemas en que hay más de una incógnita, debe haber datos para establecer tantas ecuaciones como incógnitas hay.

144. Cuando se tiene simultáneamente dos ecuaciones con dos incógnitas, determínase el valor de las incógnitas por el procedimiento que se llama.

ELIMINACIÓN.

145. *Eliminación* es el procedimiento de combinar ecuaciones de tal modo que desaparezcan una ó más incógnitas.

146. Cuatro son los principales métodos de eliminación: 1º. *Por adición y sustracción;* 2º. *Por comparación;* 3º. *Por sustitución;* 4º. *Por multiplicadores indeterminados.*

CASO I.

147. *Eliminación por adición y sustracción.*

Sean las ecuaciones $3x+2y=23$; y $4x-3y=8$.

$$3x+2y=23 \quad (1).$$
$$4x-3y=8 \quad (2).$$

Multiplicar (1) por 4, y (2) por 3, coeficientes de x, para hacerlos iguales en ambas ecuaciones.

$$12x+8y=92 \quad (3).$$
$$12x-9y=24 \quad (4).$$

Restar (4) de (3) $\quad 17y=68 \quad (5).$

De donde $\quad y=4 \quad (6).$

Así hemos eliminado á x y hallado el valor de y.

Para eliminar á y, multiplíquense (1) por 3, y (2) por 2.

$$9x+6y=69 \quad (7).$$
$$8x-6y=16 \quad (8).$$

Súmense: $17x=85$; $x=5$.

De aquí,

REGLA I.—*Multiplíquense ó divídanse las ecuaciones por números ó cantidades que hagan iguales los coeficientes de la incógnita, que se quiere eliminar, en el caso de que ya no fueran iguales.*

REGLA II.—*Si estos coeficientes tienen signos iguales, réstese una ecuacion de la otra, miembro de miembro; pero si tienen signos desiguales, súmense las ecuaciones, miembro con miembro.*

CASO II.

148. *Eliminación por comparación.*

Sean las ecuaciones $3x+5y=42$, y $2x+y=14$.

$$3x+5y=42 \quad (1).$$
$$2x+y=14 \quad (2).$$

De (1) por transposición, $x=\frac{42-5y}{3} \quad (3).$

De (2) por transposición, $x=\frac{14-y}{2}$ (4).

Hágase una ecuación de los dos valores de x.

$$\frac{42-5y}{3}=\frac{14-y}{2}.$$

Eliminando fracciones: $84-10y=42-3y$; $-10y+3y=42-84$;

$$ó\ -7y=-42;\ 7y=42;\ y=6.$$

Sustituyendo el valor de y en (3) se tendrá:

$$x=\frac{42-5\times6}{3};\ x=4.$$

De aquí,

Regla.—*Despéjese una misma incógnita en ambas ecuaciones, y con sus valores hágase una nueva ecuación.*

Caso III.

149. *Eliminación por sustitución.*

Sean las ecuaciones $3x+2y=16$, y $5x-3y=14$.

$$3x+2y=16 \quad (1).$$
$$5x-3y=14 \quad (2).$$

Despéjese y en la (1) $y=\frac{16-3x}{2}$ (3).

Sustitúyase el valor de y en (2): $5x-3\left(\frac{16-3x}{2}\right)=14$;

$$ó\ 5x-\frac{48-9x}{2}=14;\ 10x-48+9x=28;$$

$$ó\ 19x=28+48;\ x=4.$$

Sustitúyase el valor de x en (3): $y=\frac{16-3\times4}{2}$; $y=2$.

De aquí,

Regla.—*Hállese el valor de una incógnita en una de las ecuaciones, y sustitúyase su valor en la misma incógnita de la otra ecuación.*

Caso IV.

150. *Eliminación por medio de un multiplicador indeterminado.*

Sean las ecuaciones $2x+3y=23$, y $5x+2y=30$.

Si se multiplica la primera ecuación por una cantidad *m*, de valor indeterminado, se tendrá:

$$2mx+3my=23m \quad (1).$$
$$5x+\ 2y=30 \quad (2).$$

Restando (2) de (1): $2mx-5x+3my-2y=23m-30$ (3).

Y descomponiendo en factores: $(2m-5)x+(3m-2)y=23m-30$ (4).

Ahora podemos dar á m un valor tal que el coeficiente de una de las incógnitas venga á ser cero; y así quedará eliminada la incógnita.

En efecto, si $2m-5=0$ (5).

Será $m=\frac{5}{2}$ (6).

Pero si $2m-5=0$; el primer término de (4) será 0, y la ecuación quedará reducida á,

$$(3m-2)y=23m-30 \quad (7).$$

De donde: $$y=\frac{23m-30}{3m-2} \quad (8).$$

Si sustituimos en (8) el valor de m que es $\frac{5}{2}$, tendremos:

$$y=\frac{23\times\frac{5}{2}-30}{3\times\frac{5}{2}-2};\ \frac{115-60}{15-4};\ \frac{55}{11}=5 \quad (9).$$

Del mismo modo podríamos eliminar á y en (4):

$$3m-2=0 \quad (10).$$
$$m=\frac{2}{3} \quad (11).$$

Pero si $3m-2=0$, (4) vendrá á ser.

$$(2m-5)x=23m-30 \quad (12).$$

$$x=\frac{23m-30}{2m-5} \quad (13).$$

Y sustituyendo en (13) el valor de m expresado en (11), tendremos:

$$x=\frac{23\times\frac{2}{3}-30}{2\times\frac{2}{3}-5}\ ;\ x=\frac{46-90}{4-15}\ ;\ ó\ x=\frac{-44}{-11}\ ;\ x=4.$$

Si se hubieran sumado las dos ecuaciones (1) y (2), en lugar de haberse restado, se habría obtenido también la eliminación de la incógnita.

De aquí,

REGLA I.—*Multiplíquese una de las ecuaciones dadas por un factor indeterminado* m, *y tómese la suma ó diferencia de este resultado y de la otra ecuación, descomponiendo en factores.*

REGLA II.—*Hágase igual á cero el coeficiente de una de las incógnitas en esta última ecuación, y determínese el valor de* m; *luégo sustitúyase este valor en la ecuación que contiene* m, *y el resultado será una ecuación con una sola incógnita.*

Este método de eliminación se debe á Bezout.

EJEMPLOS.

Hallar el valor de x y de y en las siguientes ecuaciones:

1. $\begin{cases} 8x+5y=68. \\ 12x+7y=100. \end{cases}$ Resp.: $x=6$; $y=4$.

2. $\begin{cases} 5x+2y=19. \\ 7x-6y=9. \end{cases}$ Resp.: $x=3$; $y=2$.

3. $\begin{cases} 3x+7y=79. \\ x+4y=38. \end{cases}$ Resp.: $x=10$; $y=7$.

4. $\begin{cases} 5x-3y=36. \\ 2x+9y=96. \end{cases}$ Resp.: $x=12$; $y=8$.

6

5. $\begin{cases} x+17y=54. \\ 3x-25y=10. \end{cases}$ Resp.: $x=20$; $y=2$.

6. $\begin{cases} 5x-4y=40. \\ x-5y=-97. \end{cases}$ Resp.: $x=28$; $y=25$.

7. $\begin{cases} \frac{x+y}{10}+\frac{x-y}{2}=0. \\ \frac{x+y}{5}+\frac{x-y}{2}=1. \end{cases}$ Resp.: $x=4$; $y=6$.

8. $\begin{cases} \frac{x}{2}-y=1. \\ x-\frac{y}{2}=8. \end{cases}$ Resp.: $x=10$; $y=4$.

9. $\begin{cases} \frac{2x-y}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3y}{4}-x-2. \\ \frac{x+y}{3}=2\frac{2}{3}. \end{cases}$ Resp.: $x=3$; $y=5$.

10. $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=12. \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=13. \end{cases}$ Resp.: $x=12$; $y=18$.

11. $\begin{cases} 6x+y=12. \\ x+6y=37. \end{cases}$ Resp.: $x=1$; $y=6$.

12. $\begin{cases} x-3y=6. \\ 2x+9y=17. \end{cases}$ Resp.: $x=7$; $y=\frac{1}{3}$.

Ecuaciones de 1r Grado que contienen más de 2 incógnitas.

151. Cuando son tres ó más ecuaciones con otras tantas incógnitas pueden resolverse por medio de sucesivas eliminaciones.

$$\text{Dadas.}\begin{cases} 2x+4y+4z=18 & (1). \\ 3x+3y+2z=17 & (2). \\ 5x+6y+5z=32 & (3). \end{cases}$$

Multiplíquese (1) por 3: $6x+12y+12z=54$ (4).
Multiplíquese (2) por 2: $6x+\ 6y+\ 4z=34$ (5).

Réstese (5) de (4): $6y+\ 8z=20$ (6).

Multiplíquese (1) por 5 : $10x+20y+20z=90$ (7).
Multiplíquese (3) por 2 : $10x+12y+10z=64$ (8).

Réstese (8) de (7) : $8y+10z=26$ (9).

Multiplíquese (6) por 4 : $24y+32z=80$ (10).
Multiplíquese (9) por 3 : $24y+30z=78$ (11).

Réstese (11) de (10) : $2z=2$ (12).
De donde $z=1$

Sustituyendo el valor de z en (9) : $y=2$.
Sustituyendo el valor de y y el de z en (1) : $x=3$.

De aquí,

Regla I.—Combínese una de las ecuaciones dadas con cada una de las otras, eliminando una misma incógnita en cada combinación ; luégo combínese una de las nuevas ecuaciones así obtenidas, con cada una de las otras nuevamente obtenidas, eliminando otra incógnita ; y así se continuará hasta que se obtenga una ecuación con una sola incógnita.

Regla II.—Sáquese el valor de esta incógnita, y sustitúyase en la ecuación que tenga sólo dos incógnitas, y así se hallará el valor de una segunda; sustitúyase su valor en la ecuación en que haya tres incógnitas, y se hallará el valor de una tercera ; y así hasta que se haya encontrado el valor de todas.

EJEMPLOS.

1. $\left\{\begin{array}{l} 2x+4y-3z=22. \\ 4x-2y+5z=18. \\ 6x+7y-z=63. \end{array}\right.$ Resp. $\left\{\begin{array}{l} x=3. \\ y=7. \\ z=4. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} 3x+9y+8z=41. \\ 5x+4y-2z=20. \\ 11x+7y-6z=37. \end{array}\right.$ Resp. $\left\{\begin{array}{l} x=2. \\ y=3. \\ z=1. \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=31. \\ x+y-z=25. \\ x-y-z=9. \end{array}\right.$ Resp. $\left\{\begin{array}{l} x=20. \\ y=8. \\ z=3. \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=47. \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=38. \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=62. \end{array}\right.$ Resp. $\left\{\begin{array}{l} x=24 \\ y=60. \\ z=120. \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y}{z}=5. \\ \frac{y-z}{x}=1. \\ \frac{x-2}{y}=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$ Resp. $\left\{\begin{array}{l} x=4. \\ y=6. \\ z=2. \end{array}\right.$

6. $\left\{\begin{array}{l} \frac{6y-4x}{3z-7}=1. \\ \frac{5z-x}{2y-3z}=1. \\ \frac{y-2z}{3y-2x}=1. \end{array}\right.$ Resp. $\left\{\begin{array}{l} x=10. \\ y=7. \\ z=3. \end{array}\right.$

7. $\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{x}-\frac{4}{5y}+\frac{1}{z}=\frac{38}{5}. \\ \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}+\frac{2}{z}=\frac{61}{6}. \\ \frac{4}{5x}-\frac{1}{2y}+\frac{4}{z}=\frac{161}{10}. \end{array}\right.$ Resp. $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}. \\ y=\frac{1}{3}. \\ z=\frac{1}{4}. \end{array}\right.$

Problemas.

Con 2 y 3 incógnitas.

1.

Una mula y un asno llevan cargas de algunos quintales : quéjase el asno de la suya y dice á la mula : no me falta sino llevar un quintal de tu carga para que la mía sea doble de la tuya : la mula le responde : y si yo tomara un quintal de tu carga sería la mía triple de la tuya. Pregúntase ¿ cuántos quintales lleva cada uno ?

Notación y planteo.—Sea x la carga del asno ; y, la de la mula.

En el 1r supuesto: $x+1=2(y-1)$; $x=2y-3$.

En el 2º supuesto: $y+1=3(x-1)$; $x=\frac{y+4}{3}$; $2y-3=\frac{y+4}{3}$; $6y-9=y+4$; ó $5y=13$; $y=2\frac{3}{5}$.

Sustituyendo el valor de y en la ecuación $x=2y-3$, se tendrá: $x=2\times2\frac{3}{5}-3$; $x=\frac{26}{5}-3$; $5x=26-15$; ó $x=\frac{26-15}{5}$; $x=\frac{11}{5}=2+\frac{1}{5}$.

2.

Pedro ha dejado 120,000 pesos de herencia, la cual se repartirá así: 12,000 pesos para cada sobrino; 9,000 para cada sobrina; se ha repartido, y no ha quedado nada; pero si los sobrinos recibieran lo que las sobrinas, y éstas lo que aquéllos, sobrarían 9,000 pesos. ¿Cuántos sobrinos y sobrinas son?

Resp.: 7 sobrinos y 4 sobrinas.

3.

Tres jugadores han convenido en que á cada partida el que pierda duplique el dinero de los demás: jugaron tres partidas, perdiendo cada uno, una; y se retiraron cada uno con 120 pesos. ¿Cuánto tenía cada uno al comenzar el juego?

Sea x lo del 1º; y lo del 2º; z lo del tercero, y se supone que perdieron en ese orden.

$$\text{1ª Partida.}\left\{\begin{array}{l} 1^o.\ x-y-z. \\ 2^o.\ 2y. \\ 3^o.\ 2z. \end{array}\right.$$

$$\text{2ª Partida.}\left\{\begin{array}{l} 1^o.\ 2x-2y-2z. \\ 2^o.\ 2y-(x-y-z)-2z;\ \text{ó}\ 3y-x-z. \\ 3^o.\ 4z. \end{array}\right.$$

$$\text{3ª Partida.}\left\{\begin{array}{l} 1^o.\ 4x-4y-4z=120. \\ 2^o.\ 6y-2x-2z=120. \\ 3^o.\ 4z-(2x-2y-2z)-(3y-x-z);\ \text{ó}\ 4z- \\ \qquad -2x+2y+2z-3y+x+z=120. \end{array}\right.$$

Simplificando las tres ecuaciones de la última partida se tendrá:

$$\begin{array}{ll} x-y-z=30 & (1). \\ 3y-x-z=60 & (2). \\ 7z-x-y=120 & (3). \end{array}$$

Eliminando x en (1) y (2) por adición.

$$2y-2z=90 \quad (4).$$

Eliminando x entre (1) y (3) por adición.

$$\begin{array}{ll} 6z-2y=150 & (5). \\ 2y-2z=90 & (4). \end{array}$$

Eliminando y entre (5) y (4) por adición.

$$4z=240;\ z=\frac{240}{4}=60 \text{ lo del } 3^o.$$

Lo del 2º en la ecuación (4): $2y-120=90$; $y=105$.
Lo del 1º en la ecuación (1): $x=30+105+60=195$.

4.

Hallar dos números tales que dos veces el primero, más tres veces el segundo sea igual á 105; y tres veces el primero más dos veces el segundo sea 95.

Resp.: El 1º, 15; el 2º, 25.

5.

Hallar tres números tales, que el primero con la mitad de la suma del 2º y 3º sea igual á 120; el segundo con $\frac{1}{5}$ de la suma del 3º y 1º sea igual á 90; y la suma de los tres 190. Resp.: 50, 65, 75.

6.

Dos trabajadores A y B recibieron 51 pesos. A trabajó 14 días, y B 15 días; A recibía por el trabajo de 6 días 1 peso más de lo que recibía B por el trabajo de 4. ¿Cuánto ganaba cada uno por día?

Resp.: A, $1\frac{1}{2}$ peso; B, 2 pesos.

7.

Tres batallones tienen 1,905 soldados; la mitad del primero más $\frac{1}{3}$ del segundo, es igual á los soldados del 3º menos 60; la mitad del 3º más $\frac{1}{3}$ del 1º es igual al segundo menos 165. ¿ Cuántos soldados componían cada batallón ? Resp. : 630, 675 y 600.

8.

Hay té de tres clases : 12 libras del 1°, 13 libras del 2° y 14 del 3° valen 25 pesos ; 10 libras del 1°, 17 del 2° y 11 del 3° valen 24 pesos ; 6 del 1°, 12 del 2° y 6 del 3° valen 15 pesos. ¿ Cuál es el precio de una libra de cada clase ? Resp. : 0,50 ; 0,60 ; 0,80.

9.

A debe $1,200, y B $2,500; pero ni uno ni otro tiene lo suficiente para pagar su deuda. Dice A á B : "Prestadme $\frac{1}{5}$ de vuestro capital, y podré pagar mi deuda," y B contesta á A : "Prestadme $\frac{1}{3}$ del vuestro, y podré pagar toda la mía." ¿ Cuánto dinero tenía cada uno ? Resp. : A, $900 ; B, $2,400.

10.

Una cisterna puede llenarse por 3 llaves diferentes. La primera llave puede llenarla en 4 horas ; la 1ª y la 2ª juntas pueden llenarla en 3 horas, y la 3ª puede llenarla en 2 horas. ¿ Cuánto tiempo emplearán en llenarla las tres corriendo á la vez, y en cuánto tiempo la llenará la 2ª llave sola ?

Resp.: Las 3 en 1 hora 12 minutos; la 2ª en 12 horas.

11.

Una cisterna puede vaciarse por 2 llaves: ambas han corrido por 2 horas ; entonces se cerró la primera, y la segunda acabó de vaciar la cisterna en 2 horas y 48 minutos. Si la 2ª se hubiera cerrado á las dos horas, y se hubiera dejado abierta la 1ª, ésta habría vaciado la cisterna en 4 horas y 40 minutos. ¿ En cuánto tiempo la vaciaría cada llave sola ?

Resp. : La 1ª en 10 horas ; la 2ª en 6 horas.

12.

La suma del 1° y 2° de tres números es 13, la del 1° y 3° es 16, y la del 2° y 3° es 19. ¿ Cuáles son los números ? Resp. : 5, 8 y 11.

Nada é Infinito.

152. Los límites entre los cuales están comprendidas las cantidades, son la *nada* y el *infinito ;* y los símbolos con que se denotan son : 0 y ∞.

153. En Algebra, 0 no siempre significa mera carencia de valor, ni ∞ representa el infinito en la *más alta significación de esta palabra.*

154. El símbolo 0 llamado *nada* ó *cero,* puede emplearse para denotar la carencia de valor, ó para representar una cantidad menor que cualquier valor asignable; y el símbolo ∞, llamado *infinito,* se emplea para representar una cantidad mayor que cualquiera otra cantidad asignable.

Interpretación de las fórmulas $\frac{A}{0}, \frac{A}{\infty}, \frac{0}{A}, \frac{0}{0}$.

155. Para entender la significación de las anteriores expresiones, podemos considerar los símbolos 0 y ∞ como resultados de una cantidad arbitraria y variable que va disminuyendo de valor hasta hacerse indefinidamente pequeña, ó aumentándolo hasta venir á ser indefinidamente grande.

156. Sea la fracción $\frac{a}{b}$, en que a y b son cantidades arbitrarias. Sabemos que el valor de una fracción depende de los valores relativos del numerador y denominador.

Ahora bien,

1°. Si suponemos que el denominador b va disminuyendo contínuamente de valor, permaneciendo invariable el numerador a, resulta que la fracción irá aumentando de valor contínuamente, de manera que cuando b venga á ser menor que cualquiera cantidad asignable, ó cero, el valor de la fracción habrá venido á ser mayor que cualquiera cantidad asignable, ó ∞. De aquí, concluimos que

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

Esto es, *que una cantidad finita dividida por cero es una expresión del infinito.*

2°. Si al contrario, crece el denominador *b*, haciéndose cada vez mayor, mientras que permanece invariable el numerador *a* ; el valor de la fracción irá disminuyendo ; y cuando el denominador *b* venga á ser mayor que cualquiera cantidad asignable, ó ∞, el valor de la fracción será menor que cualquiera cantidad asignable, ó cero. De aquí,

$$\frac{a}{\infty}=0.$$

Esto es, *que una cantidad finita dividida por el infinito es una expresión de* CERO, *ó de* LA NADA.

3°. Si el numerador *a* disminuye, haciéndose cada vez menor, en tanto que el denominador *b* queda invariable, disminuirá el valor de la fracción del mismo modo ; y cuando *a* venga á ser menor que cualquier cantidad asignable, ó *cero*, el valor de la fracción vendrá á ser también cero. De aquí,

$$\frac{0}{b}=0.$$

Esto es, *que cero dividido por una cantidad finita es una expresión de la* NADA *ó* CERO.

4°. Si ambos términos *a* y *b* disminuyen simultáneamente, pero de manera que se conserve su *valor relativo*, entonces permanecerá invariable el valor de la fracción, por pequeños que vengan á ser sus términos ; y cuando *a* y *b* se hagan menores que cualquiera cantidad asignable, ó cero, tendrémos la expresión $\frac{0}{0}$ que representará el valor de $\frac{a}{b}$. Y puesto que este valor puede ser una cantidad cualquiera, concluimos que $\frac{0}{0}$ representa una cantidad indeterminada. Esto es, *que cero dividido por cero es un símbolo de indeterminación.*

Desigualdades.

157. *Desigualdad* es una expresión algébrica en que aparece que una cantidad es mayor ó menor que otra.

$$a>b,\ c<d.$$

158. En una desigualdad se llama *primer miembro*, la cantidad á la izquierda del signo ; y *segundo miembro* la que está á su derecha.

159. Al tratar de desigualdades, las voces *mayor* y *menor*, deben entenderse en su sentido algébrico, que puede definirse así :

De dos cantidades, como a *y* b, *es la mayor* a, *cuando* $a-b$ *es cantidad positiva ; y* a *es la menor cuando* $a-b$ *es negativa.*

De esta definición se sigue, que una cantidad negativa es menor que cero ; y de dos cantidades negativas, es mayor la que tiene menor valor absoluto ; ó menor número de unidades.

Así, $-2<0$, porque $-2-0=-2$, resultado negativo ; y $-3>-5$, porque $-3-(-5)=+2$, resultado positivo.

160. Se dice que dos desigualdades *subsisten en el mismo sentido*, cuando el primer miembro es mayor en ambas, ó menor en ambas.

Así, $a>b$ y $c>d$; ó $b<a$ y $d<c$.

Pero las desigualdades $m>n$ y $p<r$ son desigualdades *que subsisten en sentido contrario.*

Propiedades de las Desigualdades.

161. Para determinar las propiedades de las desigualdades, estableceremos lo siguiente :

I. *Continuará una desigualdad* EN EL MISMO SENTIDO, *si se agrega ó quita por adición ó sustracción una misma cantidad á ambos miembros.*

Porque, supuesto $a>b$, resulta que $a-b$ es cantidad positiva. De donde,

$(a\pm c)-(b\pm c)$ es cantidad positiva, y siéndolo, resulta:

$$a\pm c>b\pm c.$$

Y de aquí,

1°. Puede pasarse un término de un miembro á otro, en una desigualdad, cambiando el signo del término.

2°. Puede agregarse una ecuación á una desigualdad, sumando miembro á miembro; ó sustraerse de la misma manera, subsistiendo la desigualdad en el mismo sentido.

II. *Si se resta una desigualdad, de una ecuación, miembro á miembro, variará el sentido de la desigualdad.*

Sea $x=y$, y $a>b$.

Tendremos: $(x-a)-(y-b)=b-a$, que será una cantidad negativa.

De donde, $x-a<y-b$.

III. *Si se cambian los signos de todos los términos de una desigualdad, también se cambiará el sentido de la desigualdad.*

Porque cambiar los signos de todos los términos es equivalente á restar cada miembro de $0=0$; así:

$$a>b, \text{ restado de } 0=0.$$
$$(0-a)-(0-b)=-a+b, \quad -a<-b.$$

IV. *Si dos ó más desigualdades subsistiendo en el mismo sentido, se suman miembro á miembro, resultará una desigualdad subsistiendo en un mismo sentido.*

Sean $a>b$, $a'>b'$, $a''>b''$....

Resultará que $a-b$, $a'-b'$, $a''-b''$.... son todas positivas, y la suma de estas cantidades, $a-b+a'-b'+a''-b''$.... será positiva. De donde,

$$a+a'+a''>b+b'+b''.$$

V. *Si una desigualdad se resta de otra en sentido contrario, resultará una desigualdad subsistiendo en el mismo sentido con el minuendo.*

$$a>b \quad (1).$$
$$a'<b' \quad (2).$$

Pero $a-b$ es positiva y $a'-b'$ es negativa; luego $a-b-(a'-b')$, ó su igual $(a-a')-(b-b')$ debe ser positiva, y tendremos:

$$a-a'>b-b'.$$

Desigualdad que subsiste en el mismo sentido que (I).

VI. *Una desigualdad subsistirá en el mismo sentido si ambos miembros se multiplican ó dividen por una misma cantidad positiva.*

Sea $a>b$, y m cantidad positiva.

Puesto que $a-b$ es positiva, tendremos:

$$m(a-b), \text{ y } \frac{(a-b)}{m} \text{ positivas.}$$

$$\text{De donde, } ma>mb, \text{ y } \frac{a}{m}>\frac{b}{m}.$$

VII. *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican ó dividen por una misma cantidad negativa, se cambiará el sentido de la desigualdad.*

Porque al multiplicar ó dividir por una cantidad negativa se cambiarán los signos de los términos, y por consiguiente variará el sentido de la desigualdad (III).

VIII. *Si dos desigualdades que subsisten en el mismo sentido se multiplican una por otra, miembro por miembro, el sentido de la desigualdad resultante será el de las desigualdades primitivas cuando más de dos términos son positivos, pero tendrá el sentido invertido cuando más de dos términos son negativos.*

Multiplicar:	$a>b$,	$-a>-b$,	$-a>-b$,	$a>b$.
Por	$a'>b'$,	$-a'>-b'$,	$a'>-b'$,	$a'>-b'$.
Productos:	$aa'>bb'$,	$aa'<bb'$,	$-aa'<bb'$,	$aa'>-bb'$.

Solución de las Desigualdades.

162. La *Solución* de una desigualdad consiste en transformarla de tal modo que en un miembro entre una incógnita sola, y en el otro miembro una expresión conocida.

La desigualdad denotará pues un límite de la incógnita.

Sea $\frac{x}{2}+\frac{2x}{5}>\frac{3x}{4}+\frac{9}{4}$.

Multiplicando ambos miembros por 20.

$$10x+8x>15x+45.$$
$$18x-15x>45.$$
$$3x>45.$$
$$x>15.$$

EJEMPLOS.

1. $5x > \frac{3x}{2} + 14$. Resp. : $x > 4$.

2. $\frac{2x}{5} - \frac{2x}{3} > \frac{2x}{5} - 2$. Resp. : $x < 3$.

3. $\frac{5x}{8} + \frac{5}{4} < \frac{11}{6} + \frac{7x}{12}$. Resp. : $x < 14$.

4. $\frac{3x}{4} - \frac{x-1}{2} < 6x - \frac{20x+13}{4}$. Resp. : $x > 5$.

5. $ax - b > cx + d$. Resp. : $x > \frac{b+d}{a-c}$.

6. $\frac{x-a}{b} < 1 - \frac{x}{a}$. Resp. : $x < a$.

SECCIÓN III.

POTENCIAS Y RAÍCES.

Elevación á Potencia.

163. *Potencia* de una cantidad es el producto que resulta de multiplicar esta cantidad varias veces por sí misma.

164. La elevación á potencia de una cantidad se indica con un exponente que expresa el nombre de la potencia, y también las veces que la cantidad ha de tomarse como factor.

Sea *a* una cantidad cualquiera, y tendremos que

Su 1ª potencia es	....	$a = a^1$
" 2ª "	....	$aa = a^2$
" 3ª "	....	$aaa = a^3$
" 4ª "	....	$aaaa = a^4$
" n "	....	$aaa \ldots = a^n$

165. La 1ª potencia se llama también *potencia lineal;* la 2ª *cuadrado*, y la 3ª *cubo.*

Potencias de Monomios.

166. Puede elevarse un monomio á potencia de dos modos :

1º. Multiplicando el monomio sucesivamente por sí mismo, tantas veces como unidades menos una tiene el exponente de la potencia á que le queremos elevar :

1.	2.	3.	4.	5.
$(a)^2$	$(-a^2)^2$	$(a)^3$	$(ab^2c^3)^3$	$(-a^2b^3)^3$
a	$-a^2$	a	ab^2c^3	$-a^2b^3$
a^2	a^4	a^2	$a^2b^4c^6$	a^4b^6
		a	ab^2c^3	$-a^2b^3$
		a^3	$a^3b^6c^9$	$-a^6b^9$

2°. Siguiendo las siguientes reglas :

I. *Signos.*—Si la potencia es *par* tendrá el signo $+$; si es *impar* tendrá el signo de la raíz.

II. *Coeficientes.*—Se elevan á potencia como en la Aritmética.

III. *Letras.*—Se reproducen en órden alfabético.

IV. *Exponentes.*—Multiplícase el de cada letra por el de la potencia.

1. $(3a^2bc^3)^3 = 27a^6b^3c^9$

2. $(+2ab^3c)^2 = 4a^2b^6c^2$

3. $(-2a^3b^2c^5)^3 = -8a^9b^6c^{15}$

4. $(-2a^2b^3c)^4 = 16a^8b^{12}c^4$

Y en general :

5.
$$(-a)^n = \pm a^n,$$

usándose el signo $+$ del segundo miembro cuando la potencia es par ; y el signo $-$ cuando es impar.

EJEMPLOS.

6. Elevar x^5 á 4^a potencia. Resp.: x^{20}.
7. " y^7 á 5^a " Resp.: y^{35}.
8. " x^m á n " Resp.: x^{mn}.
9. " ab^2c^3 á 4^a " Resp.: $a^4b^8c^{12}$.
10. " $-4a$ á 4^a " Resp.: $256a^4$.
11. " $-4a$ á 3^a " Resp.: $-64a^3$.
12. " $(-5a^3b^4)^3$. Resp.: $-125a^9b^{12}$.
13. " $(a^mb^n)^4$. Resp.: $a^{4m}b^{4n}$.
14. " $(-a^m)^2$. Resp.: a^{2m}.
15. " $(-abc)^m$. Resp.: $\pm a^mb^mc^m$.
16. " $(x^my^n)^n$. Resp.: $x^{mn}y^{n^2}$.

17. Elevar $(x^my^n)^m$. Resp.: $x^{m^2}y^{mn}$.
18. " $(x^{m^2})^{m^2}$. Resp.: x^{m^4}.
19. " $(x^{m-1}y)^{m+1}$. Resp.: $x^{m^2-1}y^{m+1}$.
20. " $(ab^nc^{n^2}d^{n^3})^n$. Resp.: $a^nb^{n^2}c^{n^3}d^{n^4}$.

Potencia de Fracciones.

167. Elévanse á potencia las fracciones, elevando su numerador y denominador.

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3 = \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{a \times a \times a}{c \times c \times c} = \frac{a^3}{c^3}.$$

EJEMPLOS.

1. Elevar $\frac{3a}{bc^2}$ á 2^a potencia. Resp.: $\frac{9a^2}{b^2c^4}$.
2. " $\frac{a^3}{4x^2}$ á 3^a potencia. Resp.: $\frac{a^9}{64x^6}$.
3 " $-\frac{4a^2b}{7x}$ á 3^a potencia. Resp.: $-\frac{64a^6b^3}{343x^3}$.
4. " $-\frac{2a^3b^2}{3c^2d}$ á 4^a potencia. Resp.: $\frac{16a^{12}b^8}{81c^8d^4}$.
5. " $\frac{5}{abc}$ á 3^a potencia. Resp.: $\frac{125}{a^3b^3c^3}$.
6. " $-\frac{abc}{xyz}$ á n potencia. Resp.: $\pm\frac{a^nb^nc^n}{x^ny^nz^n}$.
7. " $\left(\frac{a^n}{c^m}\right)^{mn}$. Resp.: $\frac{a^{mn^2}}{c^{m^2n}}$.
8. " $\left(\frac{x^z}{y^2}\right)^z$. Resp.: $\frac{x^{z^2}}{y^{2z}}$.

Potencias con Exponentes Negativos.

168. Sean los tres casos siguientes :

1°. $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$

2º. $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

3º. $(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = \left(\frac{a^m}{1}\right)^n = a^{mn}$.

169. Inspeccionando los tres resultados se observa que signos contrarios en los exponentes han dado *menos*, y signos iguales *más*.

De aquí,

Regla.—*Las potencias cuando hay exponentes con signos negativos se forman según la regla general, pero observando para los signos la regla de la multiplicación.*

EJEMPLOS.

1. $(a^{-2}b)^3$. Resp.: $a^{-6}b^3$.
2. $(b^{-3}c^2)^{-2}$. Resp.: b^6c^{-4}.
3. $(2x^2y^{-m})^{-3}$. Resp.: $\frac{1}{8}x^{-6}y^{3m}$.
4. $(4a^mb^{-n})^2$. Resp.: $16a^{2m}b^{-2n}$.
5. $(-c^2d^{-x}m^4)^5$. Resp.: $-c^{10}d^{-5x}m^{20}$.
6. $(3a^{-2}xy^{-1})^{-4}$. Resp.: $\frac{1}{81}a^8x^{-4}y^4$.
7. $(-a^my^{-n})^m$. Resp.: $\pm a^{m^2}y^{-mn}$.
8. $(x^{-m^2})^{m^{-2}}$. Resp.: x^{-1}.

Potencias de Polinomios.

170. Elévase un polinomio á cualquier potencia por medio de multiplicaciones sucesivas. Multiplicando el polinomio dado por sí mismo se obtiene su cuadrado; multiplicando éste por el polinomio se obtiene su cubo; y así se continuará hasta que el polinomio haya entrado como factor tantas veces como unidades tenga el exponente de la potencia á que se quiere elevar.

EJEMPLOS.

1º. Sea $(x+y)^2$

$$\begin{array}{l} x+y \\ \hline x^2+xy+xy+y^2=x^2+2xy+y^2 \end{array}$$

2º. $(a+b)^3$

$$\begin{array}{l} a+b \\ \hline a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \qquad a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

3. $(1+2x-3x^2)^2$. Resp.: $1+4x-2x^2-12x^3-9x^4$.
4. $(3a+2b+c)^3$. Resp.: $27a^3+54a^2b+27a^2c+36ab^2+36abc+8b^3+9ac^2+12b^2c+6bc^2+c^3$.
5. $(a^2c^{-2}+a^{-2}c^2)^2$. Resp.: $a^4c^{-4}+2+a^{-4}c^4$.
6. $(a^m+x^n)^3$. Resp.: $a^{3m}+3a^{2m}x^n+3a^mx^{2n}+x^{3n}$.
7. $(x-\frac{1}{x}-1)^3$. Resp.: $x^3-\frac{1}{x^3}-3x^2-\frac{3}{x^2}+5$.
8. $\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)^2$. Resp.: $a^4-2a^3+\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}$.

Cuadrado de Polinomios.

171. Examinando (170) el cuadrado de un binomio se ve que consta de tres términos que son: 1º, cuadrado del primer término; 2º, duplo del primero por el segundo; y 3º, cuadrado del segundo:

$$x^2+2xy+y^2.$$

172. Esta fórmula del cuadrado de un binomio ofrece un método sencillo para elevar al cuadrado cualquier polinomio sin necesidad de hacer la multiplicación.

Sea el polinomio,

$$a+b+c+d+e+\ldots.$$

Hágase $x=a$, y $y=b+c+d+e+\ldots.$ Entonces el cuadrado de $x+y$ será igual al del polinomio dado, ó

$$x^2+2xy+y^2=(a+b+c+d+e+\ldots.)^2.$$

Y las tres partes del cuadrado pedido serán :

$x^2=a^2\dots$ (1).

$2xy=2ab+2ac+2ad+2ae+\dots$ (2).

$y^2=(b+c+d+e+\dots)^2$.

Ahora y representa un polinomio ; y para obtener su cuadrado, procederemos como antes. Así, hágase $x'=b$; $y'=c+d+e+\dots$

Entonces el cuadrado de $x'+y'$ será igual al del polinomio $b+c+d+e\dots$

Y tendremos :

$x'^2=b^2\dots$ (3).

$2x'y'=2bc+2bd+2be+\dots$ (4).

$y'^2=(c+d+e+\dots)^2$.

Si procedemos con el valor de y'^2 como con el de y^2, obtendremos finalmente todas las partes del cuadrado pedido.

Examinando las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) notamos que el cuadrado pedido asume la siguiente fórmula general :

$$(a+b+c+d+e+\dots)^2=a^2+2a(b+c+d+e+\dots)+ b^2+2b(c+d+e+\dots)+c^2+2c(d+e+\dots), \text{ etc.}$$

De donde, para obtener el cuadrado de un polinomio se seguirá la siguiente

REGLA.—*Escríbase el cuadrado de cada término junto con el duplo de cada término multiplicado por la suma de los términos siguientes, y simplifíquese el resultado si fuere necesario.*

EJEMPLOS.

1. $(a+b+c)^2$. Resp. : $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$.
2. $(a+b+c+d)^2$. Resp.: $a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc$-$2bd+c^2+2cd+d^2$.
3. $(a+b+c+d+e)^2$. Resp. : $a^2+2ab+2ac+2ad+2ae$-$+b^2+2bc+2bd+2be+c^2+2cd+2ce+d^2+2de$-$+e^2$.
4. $(x-y+z)^2$. Resp. : $x^2-2xy+2xz+y^2-2yz+z^2$.

5. $(1-a+a^2-a^3)^2$. Resp. : $1-2a+3a^2-4a^3+3a^4-2a^5$-$+a^6$.
6. $(3ax+2a^2-4x^2-5)^2$. Resp. : $12a^3x-24ax^3-30ax+4a^4-7a^2x^2-20a^2+16x^4+40x^2+25$.

Potencias de Binomios. Fórmula del Binomio.

173. Para evitar las multiplicaciones sucesivas en la elevación de un binomio á potencias mayores que el cubo, se puede emplear el método que resulta de las siguientes reglas :

1ª. *Términos.*—La potencia tendrá tantos términos más *uno*, cuantas unidades tenga el exponente de la potencia.

$(a+b)^5$, tendrá 6 términos ; $(a+b)^9$, tendrá 10.

2ª. *Letras.*—La primera aparecerá sola en el primer término ; la segunda, sola en el último, y ambas multiplicadas en los términos intermedios.

$(a+b)^5\dots a+ab+ab+ab+ab+b$.

3ª. *Signos.*—Si la potencia es impar, llevará los signos del binomio y en el órden en que estén ; si la potencia es par, llevará signo +, si los del binomio son iguales ; y $+-+-$, etc., si son desiguales, ya sean $+-$, ó $-+$.

4ª. *Exponentes.*—Suponiendo que el binomio es lineal, la primera letra en el primer término tendrá por exponente el de la potencia, é irá disminuyendo una unidad en cada término siguiente hasta que en el penúltimo es 1. El de la segunda letra será 1 en el segundo término, é irá aumentando una unidad hasta que en el último término tenga el exponente de la potencia.

$(a+b)^7\dots a^7+a^6b+a^5b^2+a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5+ab^6+b^7$.

5ª. *Coeficientes.*—El del primer término será 1 ; y el de cada uno de los términos siguientes, se encontrará, multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente que en él lleve la primera letra, y dividiendo el producto por el número del lugar que ocupe dicho término. De manera que el coeficiente de cada término se deduce del término anterior :

$(a+b)^5=1a^5\ldots$ el coeficiente del 2° será $\frac{1\times5}{1}=5$; luego $5a^4b$ será el 2° término... el coeficiente del 3° será $\frac{5\times4}{2}=10$; luego $10a^3b^2$, etc.

EJEMPLOS.	COEFICIENTES.
1. $(a+b)^1$.	1, 1.
2. $(-a+b)^2=a^2-2ab+b^2$.	1, 2, 1.
3. $(-a-b)^3=-a^3-3a^2b-3ab^2-$ $-b^3$.	1, 3, 3, 1.
4. $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-$ $4ab^3+b^4$.	1, 4, 6, 4, 1.
5. $(+a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-$ $-10a^2b^3+5ab^4-b^5$.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
6. $(-a-b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2-$ $+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+$ b^6.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
7. $(-a+b)^7=-a^7+7a^6b-21a^5-$ $b^2+35a^4b^3-35a^3b^4+21a^2-$ $b^5-7ab^6+b^7$.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Examinando la ley de formación de los coeficientes en las 7 primeras potencias, se encuentra, 1°, que las de cada potencia siguiente se forman sumando sucesivamente los de la potencia anterior: 2°, que cuando los términos son pares, la segunda mitad es inversa de la primera 1, 3; 3, 1, y cuando los términos son impares, encontrada la mitad de los términos y uno más, se reproducen los coeficientes de la primera mitad en la segunda pero en orden inverso, 1, 4, 6, 4, 1.

174. Cuando se quiere elevar á potencia un binomio que tiene coeficientes ó exponentes, ó ambas cosas á la vez, mayores que la unidad, puédese efectuar la operación valiéndose de la fórmula del binomio lineal, pero haciendo las transformaciones indicadas en los siguientes casos.

Caso I.

175. *Binomio con exponentes mayores que 1.*

Sea $(a^3+b^2)^3$.
Fórmula: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
Transformando exponentes: $a^9+3a^6b^2+3a^3b^4+b^6=(a^3+b^2)^3$.

Regla I.—*Elévese el binomio lineal á la potencia del binomio dado.*

II. *Multiplíquense los exponentes de cada letra de la fórmula por el que tiene la misma letra en el binomio dado.*

Caso II.

176. *Binomio con coeficientes mayores que 1.*

Sea $(3a+2b)^3$.
Fórmula: $(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$.
Transfórmanse los coeficientes: $1.3^3a^3+3.3^2.2^1a^2b+3.3.2^2ab^2+1.2^3b^3$.
Haciendo las operaciones: $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3-=(3a+2b)^3$.

Elevado el binomio lineal á la potencia dada, transfórmanse sus coeficientes según las siguientes reglas:

I. El 1r término tendrá por coeficiente el de la 1a letra en el binomio dado, elevado á la potencia de dicha letra en el 1r término de la fórmula.

II. El último término tendrá por coeficiente, el de la segunda letra en el binomio dado, elevado á la potencia de dicha letra en el último término de la fórmula.

III. Los términos intermedios tendrán por coeficiente, el de cada término de la fórmula multiplicado por los coeficientes de ambas letras en el binomio dado, elevados respectivamente á la potencia que indique el exponente de cada letra en el término de la fórmula que se quiere transformar.

Caso III.

177. *Binomio con exponentes y coeficientes mayores que* 1.

Sea $(3a^3+2b^2)^3$.

Fórmula : $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Transfórmense primero los coeficientes: $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$.

Y luégo los exponentes : $27a^9+54a^6b^2+36a^3b^4+8b^6$.

En este caso se transforma primero los coeficientes, y luégo los exponentes de la fórmula. Si se hiciera al contrario, no se obtendría el verdadero resultado.

178. Por este método se puede elevar también un polinomio á cualquier potencia, convirtiendo el polinomio en un binomio, elevando éste á la potencia, y haciendo después sustituciones.

Sea 1°. $(a+b+c)^3$.

Haciendo : $x=a$; $y=b+c$.

Tendremos : $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

Sustituyendo : $a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$.

Haciendo las operaciones : $a^3+3a^2b+3a^2c+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$ ó $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2+3bc^2+c^3=(a+b+c)^3$.

2°. $(2a^2+3b^3+c)^2$.

$2a^2=x$; $3b^3+c=y$.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.

Sustituyendo : $(2a^2)^2+2(2a^2)^1(3b^3+c)^1+(3b^3+c)^2$.

Haciendo las operaciones : $4a^4+12a^2b^3+4a^2c+9b^6+6b^3c+c^2=(2a^2+3b^3+c)^2$.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES.

179. *Raíz* de una cantidad es uno de los factores iguales que, multiplicados unos por otros, producen la cantidad dada.

180. El nombre ó grado de una raíz corresponde al número de factores iguales en que se supone dividida la cantidad. Así :

La raíz cuadrada de a^2 es uno de los dos factores iguales cuyo producto es a^2.

La raíz cúbica de a^3 es uno de los tres factores iguales cuyo producto es a^3.

181. Extracción de raíz es el procedimiento de hallar la raíz de una cantidad ; es el reverso de la elevación á potencia.

182. De dos maneras se indica la extracción de raíz :

1°. Por medio del signo $\sqrt{\ }$.

Cuando se emplea este signo, se pone encima de él un número ó letra que se llama *índice* y que indica el grado de la raíz. Así, $\sqrt[3]{a}$ indica la raíz cúbica de a ; $\sqrt[4]{a}$, su raíz cuarta. Cuando es raíz cuadrada se omite el índice, pero se subentiende el índice 2. $\sqrt[2]{x}$, se escribe $\sqrt{x}$.

2°. Por medio de exponente fraccional.

Para explanar el origen de este método de indicar la raíz, recuérdese que para elevar á potencia una cantidad se multiplica su exponente por el de la potencia. Y siendo la extracción de raíz el reverso de la elevación á potencia, se obtendrá aquella dividiendo el exponente de ésta por el índice de la raíz.

De donde,

1°. *El numerador del exponente fraccional denota la potencia de una cantidad cuya raíz quiere extraerse.*

2°. *Su denominador denota cual es la raíz que se quiere extraer.*

EJEMPLOS.

$\sqrt{a}$, ó $a^{\frac{1}{2}}$, denota la raíz cuadrada de a.

$\sqrt[3]{a}$, ó $a^{\frac{1}{3}}$, denota la raíz cúbica.

$\sqrt[n]{a^m}$, ó $a^{\frac{m}{n}}$, denota la raíz n.

183. *Raíz Sorda,* ó *irracional,* es aquélla que no puede extraerse exactamente $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{a^2}$; y *racional* la que puede obtenerse exactamente.

La raíz de un *número* que es una imperfecta potencia, puede obtenerse sólo aproximadamente. Así, $\sqrt{6}$ es raíz sorda; pero tendremos $\sqrt{6}=2,44$ aproximadamente, porque $(2,44)^2=5,9536$.

184. *Raíz imaginaria* es aquélla cuya imposibilidad es conocida por razón del signo de la cantidad dada. Así, $\sqrt{-a^2}$, es imposible, puesto que ninguna cantidad elevada al cuadrado puede dar $-a^2$. Una raíz que no es imaginaria se llama *real.*

Raíces de los Monomios.

185. Hay ciertas propiedades en las raíces, que dependen de la ley de los signos en la elevación á potencia.

1. *Cada raíz impar de una cantidad es real, y tiene el mismo signo de dicha cantidad.*

Porque una cantidad positiva elevada á una potencia impar es positiva, y una cantidad negativa elevada á potencia impar es negativa (166).

2. *Cada raíz par de una cantidad positiva es real, y puede ser ya positiva, ya negativa.*

Porque una cantidad, positiva ó negativa, elevada á potencia par es positiva (166).

3. *Cada raíz par de una cantidad negativa es imaginaria.*

Porque ninguna cantidad, sea positiva ó negativa, elevada á potencia par puede dar un resultado negativo.

186. De los anteriores principios tendremos las siguientes reglas para extraer la raíz de los monomios.

REGLA I.—*Extráigase la raíz pedida de los coeficientes numéricos, y ella será el nuevo coeficiente.*

II. *Divídase el exponente de cada letra por el del índice de la raíz.*

III. *Póngase el signo ± á la raíz par, y el signo — á la raíz impar de una cantidad negativa.*

EJEMPLOS.

1. $\sqrt{(49a^2x^4)}$. Resp.: $\pm 7ax^2$.
2. $\sqrt{25c^{10}b^2}$. Resp.: $\pm 5c^5b$.
3. $\sqrt[3]{(125a^3)}$. Resp.: $5a$.
4. $\sqrt[3]{-216a^3y^9}$. Resp.: $-6ay^3$.
5. $\sqrt[4]{16a}$. Resp.: $\pm 2a^{\frac{1}{4}}$, ó $\pm 2\sqrt[4]{a}$.
6. $\sqrt[3]{27a^2x}$. Resp.: $3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, ó $3\sqrt[3]{a^2x}$.
7. $\sqrt[5]{-32x^{10}y^4}$. Resp.: $-2x^2y^{\frac{4}{5}}$, ó $-2x^2\sqrt[5]{y^4}$.
8. $\sqrt[3]{-216a^{-3n}c^{-2}}$. Resp.: $-6a^{-n}c^{-\frac{2}{3}}$.
9. $\sqrt[5]{243a^{-5}b^{-10}}$. Resp.: $3a^{-1}b^{-2}$.
10. $\sqrt{\frac{4a^2x^4}{9a^2}}$. Resp.: $\pm\frac{2ax^2}{3a}$.
11. $\sqrt[3]{\frac{125a^3b^6}{8x^3y^{12}}}$. Resp.: $\frac{5ab^2}{2xy^4}$.
12. $\sqrt[n]{\frac{a^3}{bc}}$. Resp.: $a^{\frac{3}{n}}b^{-\frac{1}{n}}c^{-\frac{1}{n}}$.

Raíz Cuadrada de los Polinomios.

187. Comenzaremos por extraer la raíz cuadrada del cuadrado de un binomio.

188. Consta el cuadrado de un binomio, de tres términos que son : cuadrado del primero, duplo del primero por el segundo, y cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Luego para hallar su raíz cuadrada habrá que hacer una operación inversa, es decir, sacar del cuadrado del binomio, los tres términos de que se ha formado.

$$\text{Sea }\begin{array}{l|l} \sqrt{a^2+2ab+b^2} & \begin{array}{l}2a+b\\ \hline a+b\end{array} \\ -a^2 & \\ \hline \quad\;\; 2ab+b^2 & \\ \quad -2ab-b^2 & \\ \hline \qquad 00 & \end{array}$$

Extráigase la raíz cuadrada de a^2, que es *a*, y póngase como primer término de la raíz ; cuádrese y póngase su cuadrado debajo de a^2 para restarlo. Considérese lo que queda como dividendo ; duplíquese la raíz hallada y póngase este duplo encima ó debajo de la raíz para servir de divisor. Divídase por el duplo 2a el primer término del dividendo 2ab, y el cociente b, póngase á la vez en la raíz como segundo término de ella, y á la derecha del duplo ó divisor. Multiplíquese el cociente *b* por el divisor aumentado $2a+b$, y póngase el producto $2ab+b^2$ debajo del dividendo y réstese. La raíz $a+b$ es exacta pues no ha quedado residuo.

189. Cualquier polinomio (172) se puede elevar al cuadrado por medio del cuadrado de un binomio ; también se le puede extraer la raíz cuadrada siguiendo el procedimiento que acabamos de emplear con el cuadrado del binomio, pero teniendo en cuenta que el cuadrado de un polinomio consta del cuadrado de cada término más el duplo de cada término multiplicado por la suma de los términos que le siguen :

$$\begin{array}{llll|l}
\sqrt{a^2+2ab+2ac+2ad\ldots} & +b^2+2bc+2bd\ldots & +c^2+2cd\ldots & +d^2 & \begin{array}{l}2a+2b+2c+d\\ 2a+2b+c\\ 2a+b\\ \hline a+b+c+d\end{array}\\
-a^2 & & & & \\ \hline
\;\;2ab+2ac+2ad\ldots & +b^2+2bc+2bd\ldots & +c^2+2cd\ldots & +d^2 & \\
-2ab & -b^2 & & & \\ \hline
\;\;2ac+2ad & +2bc+2bd\ldots & +c^2+2cd\ldots & +d^2 & \\
-2ac & -2bc & -c^2 & & \\ \hline
\;\;2ad & +2bd & +2cd\ldots & +d^2 & \\
-2ad & -2bd & -2cd & -d^2 & \\ \hline
\;\;0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

Si se examinan los varios substraendos mirándolos *diagonalmente* se encuentra a^2, 2ab, 2ac, 2ad ; $\ldots b^2$, 2bc, 2bd ; $\ldots c^2$, 2cd ; $\ldots d^2$. Es decir, que se ha sacado del polinomio, el cuadrado de cada término de la raíz é igualmente el duplo de cada término multiplicado por los que le siguen.

De aquí,

REGLA I.—*Ordénense los términos según los exponentes de una letra, y escríbase como primer término de la raíz, la raíz cuadrada del primer término del polinomio.*

II. *Réstese el cuadrado de la raíz así hallada del primer término del polinomio, y considérese lo que queda, como dividendo.*

III. *Divídase el primer término del dividendo por el duplo de la parte de raíz ya encontrada, y póngase el cociente, á la vez, en la raíz y á la derecha del duplo divisor.*

IV. *Multiplíquese el divisor así aumentado, por el término de la raíz últimamente hallado; réstese el producto del dividendo, y procédase con lo que quede según las reglas III y IV.*

EJEMPLOS. resolverlos

1. $9x^2-30ax+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4}-3a^2x$. Resp.: $3x-5a-\frac{a^2}{2}$.
2. $4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16ab^2x+16b^4$. Resp.: $2x^2+2ax+4b^2$.
3. $x^4+2px^3+(p^2-2q)x^2-2pqx+q^2$. Resp.: x^2+px-q.
4. $1-2a+3a^2-4a^3+3a^4-2a^5+a^6$. Resp.: $1-a+a^2-a^3$.
5. $4a^4b^2-12a^3b^2+8a^3b^3+9a^2b^2-12a^2b^3+4a^2b^4$. Resp.: $2a^2b-3ab+2ab^2$.
6. $1+x$. Resp.: $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-$, etc.

Raíz Cuadrada de los Números.

190. Para descubrir el procedimiento que deba emplearse para extraer la raíz cuadrada de un número, es necesario determinar.

1°. La relación entre el número de cifras que tiene dicho número, y las que tiene su raíz cuadrada.

2°. Los lugares que ocupen las cifras de la raíz con respecto á los que ocupen las del número.

3°. El modo como las partes de un número se combinan para formar un cuadrado.

191. Lo 1° aparece del siguiente cuadro:

$$1^2=\quad 1 \qquad\qquad 9^2=\quad 81$$
$$10^2=\quad 100 \qquad\qquad 99^2=\quad 9801$$
$$100^2=10000 \qquad\qquad 999^2=998001$$

En los ejemplos anteriores notamos que una raíz de una sola cifra puede tener en su cuadrado una ó dos cifras; y que en general el aumento de una cifra en la raíz implica el de dos en el cuadrado.

De aquí,

Dividiendo el número en porciones de dos cifras, comenzando por la derecha, sabremos por el número de períodos, el número de cifras que tendrá la raíz.

192. Lo 2° se demuestra descomponiendo un número en partes, y luégo elevando éstas al cuadrado. Sea por ejemplo 2345.

$$2000^2=4\ 00\ 00\ 00$$
$$2300^2=5\ 29\ 00\ 00$$
$$2340^2=5\ 47\ 56\ 00$$
$$2345^2=5\ 49\ 90\ 25$$

Aparece de lo anterior que

El cuadrado de la primera cifra de la raíz está totalmente contenido en el primer período de la potencia; el de las dos primeras cifras de la raíz está totalmente contenido en los dos primeros períodos de la potencia, y así de los demás.

193. Lo 3° se manifiesta descomponiendo un número en dos partes conservándoles su valor relativo, y luégo elevando las partes al cuadrado.

$$\begin{array}{lll} & 1. & 2. \\ \text{Sea} & 35^2 = & (30+5)^2 \\ & \underline{35} & \underline{30+5} \\ & 175 & 900 \\ & \underline{105} & 150 \\ & 1225 & 150 \\ & & \underline{25} \\ & & 1225 \end{array}$$

Inspeccionando los productos en (2) se encuentra que son: cuadrado del 1r número; duplo del primero por el segundo, y cuadrado del segundo; exactamente las mismas partes de que se forma el cuadrado de un binomio.

De modo que haciendo $a=30$; $b=5$, tendremos $(a+b)^2=(30+5)^2=35^2$.

$$\begin{array}{rl} a^2 & = 900 \\ 2ab & = 300 \\ b^2 & = \underline{\ \ 25} \end{array}$$

$$a^2+2ab+b^2=1225=(30+5)^2=35^2$$

Luego el binomio cuadrado puede usarse como fórmula para la extracción de la raíz cuadrada de los números.

$$\begin{array}{lll} & & 6 \text{ 1r duplo divisor} \\ & \sqrt{1225} & | \ 35 \\ a^2 & \ \ 9 & \\ & \overline{\ \ 325} & \\ 2ab & \ \ 30 & \\ b^2 & \ \ \ 25 & \\ & \overline{\ \ \ \ 0} & \end{array}$$

Hay dos períodos en el número, lo que indica que habrá dos cifras en la raíz. El mayor cuadrado contenido en 12 es 9, cuya raíz es 3, que se pone en el lugar de la raíz; cuádrese y réstese del primer período. El residuo será el nuevo dividendo: duplíquese la raíz hallada, y divídase por este duplo como divisor, el dividendo; el cociente será cifra de la raíz; multiplíquese esta cifra por el duplo, y por sí misma, y ambos produc-

tos pónganse debajo del dividendo; el primer producto, desde la penúltima cifra en adelante; y el segundo, desde la primera de la derecha. Réstense del dividendo. No ha quedado residuo, luego la raíz 35 es exacta.

Para evitar la substracción con dos sustraendos á la vez, se puede poner á la derecha del duplo, la cifra de la raíz últimamente hallada, y entonces los dos productos forman uno sólo, que se resta del dividendo colocándolo desde la última cifra de la derecha.

194. De lo dicho pueden deducirse las siguientes reglas:

I. *Divídase la cantidad en períodos de dos en dos de la derecha hacia la izquierda.*

II. *Búsquese el mayor cuadrado contenido en el primer período de la izquierda, escríbase su raíz como primera cifra de la raíz buscada; réstese su cuadrado del primer período, y el residuo con el siguiente período, servirá de dividendo.*

III. *Duplíquese la raíz hallada, y póngase este duplo sobre la raíz, por el cual como divisor, se dividirá el dividendo: el cociente, que será la 2a cifra de la raíz, se pondrá á la vez en la raíz y á la derecha del duplo.*

IV. *Multiplíquese la última cifra de la raíz hallada por el duplo aumentado, y réstese el producto de lo que ha servido de dividendo.*

V. Si quedare residuo y otro período, hágase lo que indican las reglas III y IV; y así se continuará hasta que no haya residuo ni períodos; en este caso la raíz será exacta; pero si queda residuo solamente, no será exacta la raíz.

VI. El último residuo, si lo hubiese, se pondrá á la derecha de la raíz, en forma de fracción, cuyo numerador será el residuo, y su denominador el duplo de toda la raíz hallada más 1.

VII. Cuando se quiere continuar por decimales, se pone el signo decimal en la raíz hallada; se agregan dos ceros al dividendo, que equivalen á un nuevo período, y se opera como antes; si el dividendo no es bastante, se agrega un cero á la raíz y al duplo de ella, y otros dos ceros al dividendo.

EJEMPLOS.

6663
663
63

1. $\sqrt{11108889}$ | 3333

9
210
189
2188
1989
19989
19989
00

1105
105

2. $\sqrt{308026}$ | $555+\frac{1}{1111}$

25
580
525
5526
5525
1

14963
1488
144

3. $\sqrt{56}$ | $7{,}483+\frac{4711}{14967}$

700
12400
49600
4711

4. $\sqrt{4096}$. Resp.: 64.
5. $\sqrt{582169}$. Resp.: 763.
6. $\sqrt{956484}$. Resp.: 978.
7. $\sqrt{57198969}$. Resp.: 7563.
8. $\sqrt{9803161}$. Resp.: 3131.
9. $\sqrt{68492176}$. Resp.: 8276.
10. $\sqrt{14}$. Resp.: 3,7416573+.
11. $\sqrt{2}$. Resp.: 1,41+.
12. $\sqrt{7}$. Resp.: 2,64575131+.

Raíz Cúbica de los Polinomios.

195. Para descubrir el procedimiento que deba emplearse en la extracción de la raíz cúbica de un polinomio extraeremos la de un binomio.

196. Elevemos el binomio a+b al cubo, y tendremos:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Es decir, que consta de: *el cubo del primer término, el triplo del cuadrado del primero por el segundo; el triplo del primero por el cuadrado del segundo, y el cubo del segundo.*

Luego para hallar la raíz cúbica habrá que sacar del cubo esos cuatro términos.

$3a^2$ divisor para el tanteo

Así: $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ | $a+b$
$-a^3$ | $3a^2\times b=3a^2b$
$3a^2b+3ab^2+b^3$ | $3a\times b^2=3ab^2$
$-3a^2b-3ab^2-b^3$ | $b^3=\ b^3$
00

Habiendo obtenido la raíz cúbica de a^3 que es a se ha puesto como primer término de la raíz; y elevada al cubo se ha restado de a^3: el residuo, considerado como dividendo, se ha dividido por $3a^2$, y ha dado b como cociente que se ha puesto en la raíz; multiplicada b por $3a^2$ ha dado $3a^2b$ que se ha puesto debajo del dividendo para restarlo; formado el triplo de a y multiplicado por

b^2 cuadrado de b, ha dado $3ab^2$ que se ha colocado también debajo del dividendo; y por fin formado el cubo de b, que es b^3 se ha puesto debajo del dividendo, y restando de él los tres productos no ha quedado residuo. La raíz cúbica $a+b$, es pues, exacta.

197. Análogo procedimiento se emplea para extraer la raíz cúbica de un polinomio, el cual resumiremos en las siguientes reglas:

I. *Ordénese el polinomio, y escríbase la raíz cúbica de su primer término, como primer término de la raíz; réstese del polinomio el cubo de esta raíz así hallada, y téngase el residuo como dividendo.*

II. *Encima, ó debajo de la raíz, según se quiera, escríbase el triplo del cuadrado de la raíz hallada que servirá de divisor. Divídase el primer término del dividendo por este divisor, y escríbase el cociente.*

III. *Fórmense tres productos, así:* 1°, *el triplo del cuadrado del primer término de la raíz, multiplicado por su segundo término;* 2°, *el triplo del primero, por el cuadrado del segundo;* y 3°, *el cubo del segundo. Formados estos productos, se colocan debajo del dividendo y se restan.*

IV. *Si hubiese mas términos en el dividendo, procédase conforme á las reglas II y III, pero considerando toda la parte de la raíz ya encontrada como primer término.*

EJEMPLOS.

$$
\begin{array}{rl}
 & 3x^4 \text{ divisor para el tanteo} \\
1.\ \sqrt[3]{x^6+6x^5-40x^3+96x-64} & \underline{x^2+2x-4} \\
-x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad & 3x^4\times 2x=6x^5 \\
\hline
6x^5-40x^3+96x-64 & 3x^2\times 4x^2=12x^4 \\
-6x^5-12x^4-8x^3 \qquad\quad & \qquad 8x^3=8x^3 \\
\hline
-12x^4-48x^3+96x-64 & 3(x^2+2x)^2\times -4=-12x^4- \\
12x^4+48x^3-96x+64 & \qquad -48x^3-48x^2 \\
\hline
00 \qquad\qquad 00 & 3(x^2+2x)\times 16=48x^2+ \\
 & \qquad 96x \\
 & \qquad -64= \qquad -64
\end{array}
$$

2. $\sqrt[3]{x^6+3x^5-3x^4-11x^3+6x^2+12x-8}$. Resp.: x^2+x-2.

3. $\sqrt[3]{27a^3+108a^2+144a+64}$. Resp.: $3a+4$.

4. $\sqrt[3]{8x^6-36x^5+66x^4-63x^3+33x^2-9x+1}$. Resp.: $2x^2-3x+1$.

5. $\sqrt[3]{x^9-3x^8+6x^7-10x^6+12x^5-12x^4+10x^3-6x^2+3x-1}$. Resp.: x^3-x^2+x-1.

Raíz Cúbica de los Números.

198. Para descubrir el procedimiento que deba emplearse en la extracción de la raíz cúbica de un número, es necesario determinar.

1°. La relación entre el número de cifras que tiene el número, y las que tiene su raíz cúbica.

2°. Los lugares que ocupen las cifras de la raíz con respecto á los que ocupan las del número.

3°. El modo como las partes de un número se combinan para formar su cubo.

199. Lo 1°:

$$
\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
1^3= & 1 & 9^3= & 729 \\
10^3= & 1000 & 99^3= & 970299 \\
100^3= & 1000000 & 999^3= & 997002999
\end{array}
$$

En el cuadro anterior se ve que una raíz de una sola cifra puede tener una ó tres cifras en el cubo; y que, en general, el aumento de una cifra en la raíz, implica el de tres en el cubo.

De donde,

Dividiendo el número en períodos de tres cifras, comenzando por la derecha, se sabe por el número de períodos, el de cifras que tendrá la raíz.

200. Lo 2° se hace patente descomponiendo un número en partes, y luégo elevando éstas al cubo. Sea 5649.

$$
\begin{array}{l}
5000^3=125000000000 \\
5600^3=175616000000 \\
5640^3=179406144000 \\
5649^3=180232480449
\end{array}
$$

Resulta de lo anterior que,

El cubo de la primera cifra de la raíz, está totalmente contenido en el primer período de la potencia; el cubo de las dos primeras cifras lo está en los dos primeros períodos; y así de las demás.

201. Lo 3º se manifiesta descomponiendo un número en dos partes conservándoles su valor relativo, y luégo elevando las partes al cubo, según los términos del cubo de un binomio.

Sea 25, descompuesto en $20+5$, siendo $20=a$, y $5=b$.

1.	2		
$25^3=15625$	$(20+5)^3=$		$(a+b)^3$
	$20^3=$	$8000=$	a^3
	$3(20)^2\times5=$	$6000=$	$3a^2b$
	$3(20)\times25=$	$1500=$	$3ab^2$
	$5^3=$	$125=$	b^3
		15625	

De donde,

En la extracción de la raíz cúbica de los números se puede aplicar como fórmula el cubo de un binomio.

$$3(2)^2=12 \text{ divisor}$$

Sea 1. $\sqrt[3]{15625}\ |\ 25$

$$\begin{array}{rl}
8 & 3(2)^2\times5=60 \\
\hline
7625 & 3\times2\times25=150 \\
7625 & 5^3=\ 125 \\
\hline
0 & \qquad 7625
\end{array}$$

$$3(2)^2=12 \text{ divisor}$$

2. $\sqrt[3]{15625}\ |\ 25$

$$\begin{array}{rrl}
 & 8 & 3\times2^2\times5=\ (1) \\
\hline
 & 7625 & 3\times2\times25=\ (2) \\
(1) & 60 & 5^3=\ (3) \\
(2) & 150 & \\
(3) & 125 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Y reduciendo á reglas:

Regla I.—Divídase el número en períodos de tres cifras de derecha á izquierda.

II. Búsquese el mayor cubo contenido en el primer período, el cual se restará del 1r período, poniendo á la vez su raíz como primer término de la raíz.

III. El residuo, aumentado con el siguiente período se considerará como dividendo. Sepárense sus dos últimas cifras de la derecha, con un punto, y divídanse las restantes por el triplo del cuadrado de la primera cifra de la raíz. El cociente será la segunda cifra de la raíz.

IV. Fórmense tres productos, así: 1º. Triplo del cuadrado del primer término de la raíz por el segundo; 2º, triplo del primero por el cuadrado del segundo; y 3º, cubo del segundo. Réstense estos productos del dividendo, colocándolos de este modo: el 1º, desde la tercera cifra del dividendo; el 2º, desde la segunda; y el 3º, desde la primera de la derecha.

V. Si quedaren períodos se procederá según las reglas III y IV, considerando la parte de raíz ya encontrada como primer término.

VI. El último residuo, si lo hubiere, se pondrá á la derecha de la raíz en forma de fracción, poniendo dicho residuo como numerador; y por denominador, el triplo del cuadrado de la raíz hallada, más el triplo de dicha raíz, más la unidad.

VII. *Si en una raíz imperfecta se quiere sacar decimales, se agregan al residuo tres ceros, el signo decimal en la raíz, y se opera como anteriormente.*

202. Hay otro método para extraer la raíz cúbica de los números, y consiste en formar, en vez de los tres productos, solamente el cubo de toda la raíz hallada, y restarlo no del dividendo parcial, sino del número dado, hasta que el último cubo formado viene á ser igual al número dado.

Leonor Lee

$3(48)^2=6912$ divisor 2º
$3(4)^2=48$ divisor 1º

Sea $\sqrt[3]{111980168}$ | 482

$$\begin{array}{l} 64 \\ \hline 47980 \\ 110592 \\ \hline 1388168 \\ 111980168 \\ \hline 00 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 48^3=110592 \\ 482^3=111980168 \end{array}$$

EJEMPLOS.

1. $\sqrt[3]{148877}$. Resp.: 53.
2. $\sqrt[3]{11852352}$. Resp.: 228.
3. $\sqrt[3]{1061520150601}$. Resp.: 10201.
4. $\sqrt[3]{1371737997260631}$. Resp.: 111111.
5. $\sqrt[3]{2460375}$. Resp.: 135.
6. $\sqrt[3]{40353607}$. Resp.: 343.

SECCIÓN IV.

CANTIDADES RADICALES.

203. *Cantidad Radical* es una raíz meramente indicada ya por medio del signo $\sqrt{\ }$, ya por medio de un exponente fraccional; así:

$$\sqrt{a},\ a^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{b},\ b^{\frac{1}{3}}.$$

204. *El Grado* de una cantidad radical se denota con el índice del radical, ó con el exponente fraccional.

$\sqrt{a}$, $(a-b)^{\frac{1}{2}}$ son de 2º grado.

$\sqrt[3]{bc}$, $b^{\frac{1}{3}}$ son de 3r grado.

$\sqrt[n]{c}$, $d^{\frac{1}{n}}$ son de n grado.

205. *Radicales Semejantes*, son aquéllos en que una misma cantidad es afectada, con un mismo índice:

$4\sqrt[3]{a^2+b}$, $-\sqrt[3]{a^2+b}$ y $7(a^2+b)^{\frac{1}{3}}$ son radicales semejantes.

REDUCCIÓN DE RADICALES.

CASO I.

206. *Reducir un radical á su más simple forma.*

Dícese que un radical está en su más simple forma cuando no contiene potencias perfectas del ... radical. ...$=a^{nr}$ (4).

1. Reducir $\sqrt{18a^8b^3}$ á su más simple forma.

Descomponiendo en factores $\sqrt{18a^8b^3}=\sqrt{9a^8b^2\times 2b}=\sqrt{9a^8b^2}\times\sqrt{2b}=3a^4b\sqrt{2b}$.

Obsérvese que se ha descompuesto en dos factores de los cuales uno es un perfecto cuadrado, cuya raíz se ha extraido, quedando una raíz sorda $\sqrt{2b}$.

2. Reducir $3\sqrt[3]{8x^4y^3-8x^3y^4}$.

Descomponiendo en factores: $3\sqrt[3]{8x^4y^3-8x^3y^4}=3\times\sqrt[3]{8x^3y^3}\times\sqrt[3]{x-y}=3\times 2xy\times\sqrt[3]{x-y}=6xy\sqrt[3]{x-y}$.

De aquí,

Regla I.—*Sepárense los factores de la cantidad en dos partes bajo el signo radical, una que contenga las potencias perfectas del grado del radical.*

II. *Extráigase la raíz de la parte racional, multiplicando esta raíz por el coeficiente de fuera, si la hubiere, y póngase este producto antes de la cantidad sorda que ha quedado dentro el radical.*

EJEMPLOS.

1. $\sqrt{162}$. Resp.: $9\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{128}$. Resp.: $8\sqrt{2}$.
3. $\sqrt{12x^2y}$. Resp.: $2x\sqrt{3y}$.
4. $\sqrt[3]{54x^4}$. Resp.: $3x\sqrt[3]{2x}$.
5. $\sqrt{x^3-a^2x^2}$. Resp.: $x\sqrt{x-a^2}$.
6. $\sqrt[3]{a^3+a^3b^2}$. Resp.: $a\sqrt[3]{1+b^2}$.
7. $\sqrt{\frac{44}{75}}=\sqrt{\frac{4}{25}\times\frac{11}{3}}=\sqrt{\frac{4}{25}\times\frac{33}{9}}=\sqrt{\frac{4}{25}\times\frac{1}{9}\times 33}=\frac{2}{15}\sqrt{33}$.
8. $\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$. Resp.: $\frac{1}{3}\sqrt[3]{75}$.
9. $2\sqrt{\frac{2a}{3}}$. Resp.: $\frac{2}{3}\sqrt{6a}$.

$\sqrt{72}$ Resp.: $\frac{1}{7}\sqrt{10}$.

Caso II.

207. *Colocar una cantidad ó un coeficiente bajo un radical.*

Puesto que la elevación á potencia es el reverso de la extracción de raíz, tendremos:

$$a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[4]{a^4},\ \text{etc.}$$

Y también,

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}.$$

De donde,

Regla I.—*Para colocar una cantidad bajo un radical, élevese la cantidad á la potencia que indique el radical, y póngase debajo del signo.*

II. *Para colocar un coeficiente, elévese éste al grado que indique el radical, y el resultado se multiplica por la cantidad del radical de que era coeficiente.*

EJEMPLOS.

1. Enciérrese ab^2 en $\sqrt{\ }$. Resp.: $\sqrt{a^2b^4}$.
2. Enciérrese $5a^2xy^3$ en $\sqrt[3]{\ }$. Resp.: $\sqrt[3]{125a^6x^3y^9}$.
3. Enciérrese en el radical el coeficiente en $4a\sqrt{2xy}$. Resp.: $\sqrt{32a^2xy}$.
4. Enciérrese en el radical el coeficiente en $3x^2\sqrt[3]{x-y}$. Resp.: $\sqrt[3]{27x^7-27x^6y}$.

Caso III.

208. *Reducir radicales á un índice común.*

Puede demostrarse que $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mr}{nr}}$, siendo *r* un entero.

Sea $x=a^{\frac{m}{n}}$.... (1).
Elevando (1) á la potencia *n*.... $x^n=a^m$ (2).
Elevando (2) á *r*.... $x^{nr}=a^{mr}$ (3).

Extrayendo la raíz nr de (3).... $x=a^{\frac{mr}{nr}}$ (4).

Igualando los valores de x en (1) y (4) $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mr}{nr}}$.

De donde,

I. *Si los dos términos de un exponente fraccional se multiplican ó dividen por un mismo número, no cambiará el valor de la expresión.*

De (182) tenemos :

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\text{y } a^{\frac{mr}{nr}}=\sqrt[nr]{a^{mr}}.$$

De donde,

II. *Si se multiplican ó dividen por un mismo número á la vez, el índice de un radical y el exponente de la cantidad que está debajo de él, no cambiará el valor de la expresión.*

1°. Reducir $(ab)^{\frac{1}{2}}$ y $(a^2x)^{\frac{1}{3}}$ á un índice común.

$$\left.\begin{array}{l}(ab)^{\frac{1}{2}}=(ab)^{\frac{3}{6}}=(a^3b^3)^{\frac{1}{6}}\\(a^2x)^{\frac{1}{3}}=(a^2x)^{\frac{2}{6}}=(a^4x^2)^{\frac{1}{6}}\end{array}\right\}\text{Resp.}$$

2°. Reducir $\sqrt[3]{a^2c}$ y $\sqrt[4]{x^3z^2}$ á un índice común.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{a^2c}=\sqrt[12]{a^8c^4}\\\sqrt[4]{x^3z^2}=\sqrt[12]{x^9z^6}\end{array}\right\}\text{Resp.}$$

De aquí,

REGLA I.—Cuando las cantidades están afectadas por exponentes fraccionales : *Redúzcanse los exponentes dados á su menor común denominador ; elévese luégo cada cantidad á la potencia denotada por el numerador de su nuevo exponente, y aféctese cada resultado con un exponente fraccional igual á la recíproca del común denominador.*

II. Cuando las cantidades están afectadas por el signo radical : *Hállese el menor múltiplo común de los índices dados que será el índice común requerido ; y elévese cada cantidad de las que están bajo el radical, á la potencia indicada por el cociente del nuevo índice dividido por el índice dado.*

EJEMPLOS.

1. Reducir á índice común : $a^{\frac{1}{2}}$, $(cd)^{\frac{1}{3}}$, $(a^2c)^{\frac{1}{4}}$. Resp. : $a^{\frac{6}{12}}$, $(c^4d^4)^{\frac{1}{12}}$, $(a^6c^3)^{\frac{1}{12}}$.
2. Reducir á índice común : $(3a^2x)^{\frac{1}{3}}$, $(2ax^3)^{\frac{1}{4}}$. Resp. : $(81a^8x^4)^{\frac{1}{12}}$, $(8a^3x^9)^{\frac{1}{12}}$.
3. Reducir á índice común : a, $\sqrt{ac}$, $\sqrt[3]{a^2x}$, $\sqrt[4]{2ac^2}$. Resp. : $\sqrt[12]{a^{12}}$, $\sqrt[12]{a^6c^6}$, $\sqrt[12]{a^8x^4}$, $\sqrt[12]{8a^3c^6}$.
4. Reducir á índice común : $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$. Resp. : $\sqrt[20]{1024}$, $\sqrt[20]{32}$, $\sqrt[20]{16}$.

ADICION DE RADICALES.

209. Cuando las cantidades que han de sumarse son radicales semejantes, es evidente que la parte común radical, puede considerarse como unidad de adición ; el resultado será pues un solo radical cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los radicales dados. Radicales que aparecen desemejantes pueden volverse á veces semejantes, con sólo reducirlos á su más simple forma.

1. ¿ Cuál es la suma de $7\sqrt{ac}$, $3\sqrt{ac}$, $5\sqrt{ac}$?

$$7\sqrt{ac}+3\sqrt{ac}+5\sqrt{ac}=15\sqrt{ac}$$

2. ¿ Cuál es la suma de $\sqrt[3]{8a^5c}$, $\sqrt[3]{27a^5c}$, $\sqrt[3]{64a^2c^4}$?

OPERACIÓN.

$$\begin{array}{r}\sqrt[3]{8a^5c}=2a\sqrt[3]{a^2c}\\\sqrt[3]{27a^5c}=3a\sqrt[3]{a^2c}\\\sqrt[3]{64a^2c^4}=4c\sqrt[3]{a^2c}\\\hline\text{Suma }(5a+4c)\sqrt[3]{a^2c}\end{array}$$

Si los radicales son desemejantes, la adición sólo puede indicarse.

De aquí,

Regla I.—*Redúzcase cada radical á su más simple forma.*

II. *Si los radicales que resultan son semejantes, súmense sus coeficientes, y la suma multiplíquese por el radical común; si son desemejantes, indíquese la adición con el signo conveniente.*

EJEMPLOS.

1. $\sqrt{18}+\sqrt{32}+\sqrt{50}+\sqrt{72}$. Resp.: $18\sqrt{2}$.
2. $2\sqrt{8}+3\sqrt{50}+6\sqrt{18}$. Resp.: $37\sqrt{2}$.
3. $\sqrt{\frac{3}{5}}+\sqrt{\frac{1}{15}}+\sqrt{\frac{15}{49}}$. Resp.: $\frac{43}{105}\sqrt{15}$.
4. $x\sqrt{12a^4x}+2a^2\sqrt{27x^3}+3a\sqrt{48a^2x^3}$. Resp.: $20a^2x\sqrt{3x}$.
5. $2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}+2\sqrt{\frac{3}{16}}$. Resp.: $\frac{31}{2}\sqrt{3}$.
6. $3b\sqrt[3]{2a^5b^2}+7\sqrt[3]{2a^5b^5}+8a\sqrt[3]{2a^2b^5}$. Resp.: $18ab\sqrt[3]{2a^2b^2}$.

SUSTRACCIÓN DE RADICALES.

210. Cuando los radicales son semejantes, es evidente que puede tomarse el radical común como unidad de sustracción.

1. De $4\sqrt{a^2b}$, réstese $2\sqrt{a^2b}$.

$$4\sqrt{a^2b}-2\sqrt{a^2b}=2\sqrt{a^2b}.$$

2. De $\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2}$, réstese $\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}$.

Descomponiendo en factores:

$$\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2}=\sqrt{(a^2+2ab+b^2)a}=a+b\sqrt{a}$$
$$\sqrt{a^3-2a^2b+ab^2}=\sqrt{(a^2-2ab+b^2)a}=a-b\sqrt{a}$$

Residuo $2b\sqrt{a}$

3. De $5\sqrt[3]{a^2b}$, réstese $3\sqrt{c^2d}$.

$$5\sqrt[3]{a^2b}-3\sqrt{c^2d}\text{ indicado.}$$

De aquí,

Regla I.—*Redúzcase cada radical á su más simple forma.*

II. *Si los radicales que resultan son semejantes, tómese la diferencia de los coeficientes, y el resultado multiplíquese por la parte radical común; si son desemejantes, indíquese la sustracción con el respectivo signo.*

EJEMPLOS.

1. De $\sqrt{320}$ restar $\sqrt{80}$. Resp.: $4\sqrt{5}$.
2. De $b\sqrt[3]{27a^6b}$ restar $\sqrt[3]{216a^6b^4}$. Resp.: $-3a^2b\sqrt[3]{b}$.
3. De $\sqrt{289a^2b}$ restar $\sqrt{144a^2b}$. Resp.: $5a\sqrt{b}$.
4. De $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{32}}$ restar $\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{36}}$. Resp.: $\frac{31}{90}\sqrt[3]{6}$.

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES.

211. Se ha demostrado ya que la *n* potencia del producto de dos ó más factores es igual al producto de las *n* potencias de aquellos factores. Y puesto que la inversa de esta proposición es verdadera, tendremos:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$$

Si los radicales tienen coeficientes, se tomará el producto de éstos separadamente. Así,

$$c\sqrt[n]{a}\times d\sqrt[n]{b}=c\times d\times\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=cd\sqrt[n]{ab}.$$

Si los radicales no tienen un índice común, debe reducírseles primero al mismo grado.

¿Cuál es el producto de $a\sqrt{x}$ por $b\sqrt[3]{x^2y}$?

OPERACIÓN.

$$a\sqrt{x}=a\sqrt[6]{x^3}$$
$$b\sqrt[3]{x^2y}=b\sqrt[6]{x^4y^2}$$
$$\text{Producto, } ab\sqrt[6]{x^7y^2}=abx\sqrt[6]{xy^2}.$$

De aquí,

REGLA I.—*Redúzcanse, si es necesario, los radicales dados á un índice común.*

II. *Multiplíquense las cantidades que estén debajo de radicales, unas por otras, y póngase el producto bajo el radical común; antepóngase á este producto el de los coeficientes, y redúzcase la expresión á su más simple forma.*

EJEMPLOS.

1. $3\sqrt{8}\times4\sqrt{48}$. Resp.: $96\sqrt{6}$.
2. $4\sqrt{12}\times3\sqrt{2}$. Resp.: $24\sqrt{6}$.
3. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\times\frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$. Resp.: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$.
4. $5a\sqrt{ax}\times\frac{5}{2}\sqrt{bx}$. Resp.: $\frac{25ax}{2}\sqrt{ab}$.
5. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{3}{4}}$. Resp.: $\frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{27}{4}}$.
6. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\times\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$. Resp.: $\frac{1}{96}\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$.

DIVISIÓN DE RADICALES.

212. Puesto que para elevar á una potencia una fracción, se elevan á la vez su numerador y denominador á dicha potencia, es evidente que para obtener la raíz de una fracción, se hará una operación inversa, es decir, extraer separadamente la raíz de su numerador y denominador. De aquí, tendremos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Y al contrario

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Esto es,

El cociente de las raíces n de dos cantidades es igual á la n *raíz del cociente de ellas.*

Fúndase en este principio la división de los radicales.

Divídase $6a^2\sqrt{bc}$ entre $3a\sqrt{c}$.

$$\frac{6a^2\sqrt{bc}}{3a\sqrt{c}}=\frac{6a^2}{3a}\sqrt{\frac{bc}{c}}=2a\sqrt{b}.$$

Divídase $\sqrt[3]{x^2y}$ entre $\sqrt{xy}$.

$$\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt[6]{x^4y^2}}{\sqrt[6]{x^3y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x^4y^2}{x^3y^3}}=\sqrt[6]{\frac{x}{y}}.$$

De aquí,

REGLA I.—*Redúzcanse, si es necesario, los radicales á un índice común.*

II. *Divídase el coeficiente del dividendo por el del divisor; divídase además la parte radical del dividendo por la parte radical del divisor, y colóquese el cociente bajo un radical común.*

EJEMPLOS.

1. Divídase $x+\sqrt{xy}+y$ entre $\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}$.

OPERACIÓN.

$$\begin{array}{l|l}
x+\sqrt{xy}+y & \sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y} \\
-x-\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt{xy} & \sqrt{x}-\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y} \\
\hline
-\sqrt[4]{x^3y}+y & \\
+\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt{xy}+\sqrt[4]{xy^3} & \\
\hline
\sqrt{xy}+\sqrt[4]{xy^3}+y & \\
-\sqrt{xy}-\sqrt[4]{xy^3}-y & \\
\hline
0 \quad 0 &
\end{array}$$

16
4868

2. $\frac{7}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \div \frac{13}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$. Resp.: $\frac{28}{39}\sqrt[3]{\frac{10}{3}}$.

3. $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{5}} \div \frac{3}{7}\sqrt{\frac{5}{2}}$. Resp.: $\frac{7}{12}\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{7}{30}$.

4. $2\sqrt{2ax} \div \sqrt[3]{4bx^2}$. Resp.: $2\sqrt[6]{\frac{a^3}{2b^2x}}$.

CANTIDADES IMAGINARIAS.

213. Ya se dijo (184) que la raíz par de una cantidad negativa es *imaginaria*. Así es que si se toma a^2 que es numéricamente un cuadrado perfecto, y se le afecta con el signo *menos*, no se puede obtener la raíz. Porque,

$$(+a)^2 = +a^2$$
$$(-a)^2 = +a^2$$

De aquí, que la indicación de la raíz $\sqrt{-a^2}$ no es una cantidad *real* sino *imaginaria*.

214. Cuando una cantidad real está enlazada con una imaginaria en una sola expresión, considérase el todo como expresión imaginaria. Así el binomio $2 + \sqrt{-3}$, considerado como una sola cantidad es imaginaria.

215. Una cantidad imaginaria de segundo grado, puede resolverse en dos factores, uno que es una cantidad real, y $\sqrt{-1}$ que es imaginaria.

Así, $\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}$; $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$; $\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}$.

El factor $\sqrt{-1}$ se llama *factor imaginario*, y el otro es su *coeficiente*. En $\sqrt{3} \times \sqrt{-1}$, el coeficiente es $\sqrt{3}$, y $\sqrt{-1}$ el factor imaginario. En las cantidades con factores imaginarios se opera como se ha dicho anteriormente de las cantidades radicales; pero con una modificación en la multiplicación con respecto á las re-

glas de signos; porque $\sqrt{-4}$ por $\sqrt{-3}$, que según la regla ordinaria debería producir $\sqrt{12}$, lo que dá es $-\sqrt{12}$.

216. Cuando hay que multiplicar varios factores imaginarios, se reducen primero á la forma de coeficiente y factor imaginario $a\sqrt{-1}$. Multiplícanse los coeficientes según las reglas ordinarias, y los factores imaginarios como se va á indicar.

217. Las potencias sucesivas de $\sqrt{-1}$ son:

$$(\sqrt{-1})^1 = +\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = -1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = (-1) \times (\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (-\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = +1$$

Multiplicando estas potencias, en su orden, por la cuarta, se tendrán la 5ª, 6ª, 7ª y 8ª, que serán las mismas que la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª.

Ahora, búsquese el producto de $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-b}$.

Descomponiendo en factores: $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} \times \sqrt{b}.\sqrt{-1}$

$$= \sqrt{ab} \times (\sqrt{-1})^2$$
$$= \sqrt{ab} \times (-1)$$
$$= -\sqrt{ab}, \text{ cantidad real y negativa.}$$

Pero si multiplicáramos según las reglas ordinarias de signos, tendríamos

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{(-a).(-b)} = \sqrt{ab}$$

resultado erróneo con respecto al signo antes del radical.

Procediendo ahora como en la primera operación, tendremos

$$(-\sqrt{-a}) \times (-\sqrt{-b}) = +\sqrt{ab}.(-1) = -\sqrt{ab}$$
$$(+\sqrt{-a}) \times (-\sqrt{-b}) = -\sqrt{ab}.(-1) = +\sqrt{ab}$$

Es decir, signos iguales producen $-$, y signos desiguales dan $+$. De donde,

El producto de dos términos imaginarios de segundo grado será real, y el signo delante del radical será determinado por la regla común de los signos pero invertida.

EJEMPLOS.

1. Multiplicar $\sqrt{-a^2}\times\sqrt{-b^2}$. Resp.: $a\times b(\sqrt{-1})^2=-ab$.
2. Multiplicar $\sqrt{-a^2}\times\sqrt{-b^2}\times\sqrt{-c^2}$. Resp.: $abc(\sqrt{-1})^3=-abc\sqrt{-1}$.
3. Multiplicar $\sqrt{-a^2}\times\sqrt{-b^2}\times\sqrt{-c^2}\times\sqrt{-d^2}$. Resp.: $abcd(\sqrt{-1})^4=abcd$.
4. Multiplicar $(4+\sqrt{-2})\times(3-\sqrt{-2})$. Resp.: $=14-\sqrt{-2}$.
5. Multiplicar $(2-\sqrt{-2})\times(2-\sqrt{-2})$.

OPERACIÓN.

$$\begin{array}{l} 2-\sqrt{-2} \\ 2-\sqrt{-2} \\ \hline 4-2\sqrt{-2} \\ \quad -2\sqrt{-2}-\sqrt{4} \\ \hline 4-4\sqrt{-2}-\sqrt{4} \\ 4-4\sqrt{-2}-2=2-4\sqrt{-2} \end{array}$$

Ecuaciones de 2° Grado.

218. *Ecuaciones de 2° grado,* son las que contienen una incógnita elevada al cuadrado; y se dividen en *Incompletas* y *Completas.*

Ecuaciones Incompletas.

219. *Ecuación Incompleta* es la que contiene la incógnita solamente en el 2° grado, como $3x^2-7=20$.

220. Se resuelve aplicando las reglas de las simples ecuaciones hasta convertirla en la forma $x^2=a$, y luégo extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, afectando la del segundo con el signo $\pm$.

EJEMPLOS.

1. $3x^2-7=20$.

Despejando $x^2=\frac{20+7}{3}$.

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{9}$$
$$x=\pm 3$$

2. $\frac{x^2-4}{6}-\frac{x^2-24}{4}=\frac{x^2}{2}-32$.

Eliminando denominadores: $2x^2-8-3x^2+72=6x^2-384$.

Reuniendo x^2 en el 1r miembro: $-7x^2=-384-72+8$.

Cambiando signos: $7x^2=448$.

Dividiendo por 7: $\sqrt{x^2}=\pm\sqrt{64}$.

$$x=\pm 8.$$

3. $3x^2-16=x^2+2$. Resp.: $x=\pm 3$.
4. $2x^2-54=126-3x^2$. Resp.: $x=\pm 6$.
5. $7x^2+8=57+3x^2+15$. Resp.: $x=\pm 4$.
6. $bx^2+2d=2cx^2+a$. Resp.: $x=\pm\sqrt{\frac{a-2d}{b-2c}}$.

Ecuaciones Completas.

221. *Ecuación Completa* es la que contiene la primera y la segunda potencia de la incógnita.

$$x^2+2px=q.$$

222. Cualquiera ecuación completa puede reducirse á la forma general,

$$x^2+2px=q,$$

en que 2p y q pueden ser cantidades positivas ó negativas, enteras ó fraccionarias.

223. Como no puede haber cuadrado que tenga sólo dos términos, es necesario completar el cuadrado en dicha forma, agregando á ambos miembros p^2. Así:

$$x^2+2px+p^2=q+p^2.$$

El primer miembro es un cuadrado perfecto. Tomando la raíz cuadrada de ambos miembros, se tendrá.

$$x+p=\pm\sqrt{p^2+q}$$
$$x=-p\pm\sqrt{p^2+q}$$

De modo que la ecuación tiene dos raíces desiguales según se tome el radical con signo + ó con signo —. Sólo en un caso tendrá dos raíces iguales, y es cuando la cantidad del radical p^2+q es igual á 0. Entonces tendremos

$$x=p\pm 0\,;\; p-0=p\,;\; p+0=p.$$

Sea $\quad x^2-10x=-25.$

Tómese la mitad de 10, coeficiente de x, cuádrese y agréguese á cada miembro, así:

$$x^2-10x+25=-25+25$$
$$\text{ó } x^2-10x+25=0.$$

Extrayendo la raíz $x-5=\pm 0.$

$$x=5\pm 0=5.$$

De donde,

REGLA I.—*Redúzcase la ecuación dada á la forma de* $x^2+2px=q$.

II. *Agréguese á ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x, *y el primer miembro vendrá á ser cuadrado perfecto.*

III. *Extráigase la raíz cuadrada de ambos miembros, y resuélvase la ecuación que resulte.*

EJEMPLOS.

1. $x^2+2x=15$. Resp.: $x=3$ ó -5.
2. $x^2-6x=16$. Resp.: $x=8$ ó -2.
3. $x^2-20x=-96$. Resp.: $x=12$ ó 8.
4. $x^2-6x-7=33$. Resp.: $x=10$ ó -4.
5. $x^2+8x=12$. Resp.: $x=-4\pm 2\sqrt{7}$.
6. $x^2-\frac{2x}{15}=\frac{7}{12}$. Resp.: $x=\frac{5}{6}$ ó $-\frac{7}{10}$.

PROBLEMAS.

1.

¿Cuál es el número cuyo cuadrado sumado con 132 es igual á 23 veces dicho número? Resp.: 12 ú 11.

2.

Hallar un número tal, que si se resta de 22, y el residuo se multiplica por dicho número, el producto sea 117. Resp.: 13 ó 9.

3.

La diferencia de dos números es 4, y su suma multiplicada por la diferencia de sus cuadrados da 1,600. ¿Cuáles son los números? Resp.: 12 y 8.

4.

Hallar dos números cuya diferencia es 8, y cuyo producto 128. Resp.: 16 y 8.

5.

¿Cuál es el número cuyo cuadrado menos el quíntuplo de dicho número es 50? Resp.: 10 y —5.

6.

¿Cuál es el número cuyo cuadrado menos 7 veces dicho número es —6? Resp.: 6 y 1.

RAZONES Y PROPORCIONES.

224. *Razón* de dos cantidades es el cociente que resulta de dividir una por otra.

Escríbense las razones de dos modos: ó poniendo el dividendo delante del divisor separados por : así, a : b; ó poniéndolos en forma de fracción $\frac{a}{b}$. En el primer caso se lee *a* es á *b*; y en el segundo, *a* entre *b*.

225. Llámase *Antecedente* el primer término de cada razón, y *Consecuente*, el segundo.

226. *Razón Compuesta* es el producto de dos ó más razones. Así :

$$\left\{\begin{array}{l} a : b \\ c : d \end{array}\right.$$

Razón compuesta : $ac : bd$.

227. *Razón Duplicada* de dos cantidades es la razón de sus cuadrados : $a^2 : b^2$.

228. *Razón Triplicada* de dos cantidades es la razón de sus cubos : $a^3 : b^3$.

229. *Razones iguales* son las que dan cocientes iguales.

230. *Proporción* es la comparación de dos razones iguales.

Escríbese de dos modos, ó poniendo : : entre las dos razones, así : $a : b :: c : d$; ó colocando el signo $=$ entre las razones puestas en cualquiera de sus dos formas, así: $a : b = c : d$, ó $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

231. Llámanse *Extremos* el 1° y 4° términos de una proporción, y *Medios* el 2° y 3°. Según sus medios divídese la proporción en *Discreta* que es la de medios desiguales, y *Continua* que es la de medios iguales, y puede escribirse $\div a : b : c$, en lugar de $a : b :: b : c$.

Demostraremos algunas de las más importantes propiedades de las proporciones.

1.

232. *Transformaciones que pueden efectuarse con los términos de una proporción sin que ésta deje de serlo.*

Sea $a : b :: c : d$ (1)

ó $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (A).

Eliminando fracciones : $ad = bc$, ó $bc = ad$.

En que el producto de los extremos a, d, es igual al de los medios b, c. De donde,

1ª. *En una proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios.*

Leonor Lee

Sea (A) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, en su forma,

$$ad = bc.$$

Dividiendo por bd : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ó $a : b :: c : d$ (1).

En que los factores del primer producto a, d, son los extremos ; y los del 2°, b, c, los medios. De donde,

2ª. *Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos cantidades, las dos primeras pueden ser medios en una proporción, y las otras dos, pueden ser extremos, ó al contrario.*

Sea $a : b :: c : d$ (1),

ó su igual (A) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Multiplicando por b : $a = \frac{bc}{d}$ (2).

Dividiendo á (2) por c : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ó $a : c :: b : d$.

En que a y c antecedentes de (1) son proporcionales á *b* y *d* sus consecuentes. De donde,

3ª. *Si en una proporción se efectúa la* Alternación *de sus términos, es decir, que se comparan antecedente con antecedente, y consecuente con consecuente, siempre subsiste la proporción.*

Sea $a : b :: c : d$ (1),

ó su igual (A) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Eliminando fracciones :

$$ad = bc, \text{ ó } bc = ad,$$

de donde (por Propiedad 2) $b : a :: d : c$.

En que b, d, consecuentes de (1) son los antecedentes ; y a, c, sus antecedentes, están como consecuentes. De donde,

4ª. *Si en una proporción se efectúa la* Inversión, *es decir, el cambio recíproco de antecedente y consecuente en cada razón, subsiste la proporción.*

Sea a : b : : c : d (1),

ó (A) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Si agregamos, ó quitamos 1 en cada miembro tendremos:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \text{ y } \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1.$$

Y reduciendo á común denominador,

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ y } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

ó a+b : b : : c+d : d, y a−b : b : : c−d : d.

De donde,

5ª. *En una proporción, sin que deje de serlo, se puede efectuar la* Composición *ó* División, *es decir, que la suma ó diferencia del 1º y 2º término sea al 2º, como la suma ó diferencia del 3º y 4º es al 4º.*

Sea a+b : b : : c+d : d (2),

y a−b : b : : c−d : d (3).

De (2) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (4).

De (3) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (5).

Dividiendo (4) por (5) : $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$,

ó a+b : a−b : : c+d : c−d.

De donde,

6ª. *En una proporción, sin que deje de serlo, se puede efectuar la* Composición *y* División *á la vez, es decir, que la suma del 1º y 2º término sea á su diferencia, como la suma del 3º y 4º es á su diferencia.*

II. 233. *Transformaciones que pueden efectuarse en una proporción, con la introducción de cantidades distintas de sus términos.*

Sea a : b : : c : d (1),

ó (A) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Y puesto que no varía el valor de una fracción por que se multipliquen ó dividan por una misma cantidad sus términos,

Multiplicando $\frac{a}{b}$ por n : $\frac{an}{bn}=\frac{c}{d}$, ó an : bn : : c : d (3).

Multiplicando $\frac{c}{d}$ por n: $\frac{a}{b}=\frac{cn}{dn}$, ó a : b : : cn : dn (4).

Pero volviendo $n=\frac{1}{m}$ tendremos,

en (3) $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$: : c : d,

en (4) a : b : : $\frac{c}{m}:\frac{d}{m}$.

De donde,

1ª. *Multiplicando ó dividiendo por una misma cantidad los dos términos de una de las razones, de la proporción, siempre subsiste la proporción.*

Sea a : b : : c : d (1),

ó (A) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

En fracciones iguales pueden multiplicarse ó dividirse sus numeradores, ó sus denominadores por una misma cantidad, sin que se altere la igualdad.

Multiplicando numeradores en (A) por n : $\frac{an}{b}=\frac{cn}{d}$;

ó an : b : : cn : d (2).

Multiplicando denominadores por n : $\frac{a}{bn}=\frac{c}{dn}$, ó a : bn : : c : dn (3).

Siendo $n=\frac{1}{m}$ tendremos,

en (2) $\frac{a}{m}$: b : : $\frac{c}{m}$: d,

en (3) a : $\frac{b}{m}$: : c : $\frac{d}{m}$.

De donde,

2ª. *Multiplicando ó dividiendo por una misma cantidad, ó los antecedentes, ó los consecuentes de una proporción, siempre subsiste la proporción.*

$$\begin{aligned} &\text{Si } a : b :: m : n \quad (2) \\ &\text{y } c : d :: m : n \quad (3) \\ &\text{será } a : b :: c : d \quad (1). \end{aligned}$$

De (2) $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$.

De (3) $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$.

Luego $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ó $a : b :: c : d$.

De donde,

3ª. *Cantidades que son proporcionales á unas mismas cantidades, son proporcionales entre sí.*

Sea $a : b :: c : d :: e : f :: g : h$, etc.

Comparando la razón $a : b$ primero consigo misma y luégo con las demás, tendremos :

$$\begin{aligned} ab&=ba \\ ad&=bc \\ af&=be \\ ah&=bg \end{aligned}$$

De donde,

$$a(b+d+f+h)=b(a+c+e+g),$$
$$\text{ó } a : b :: a+c+e+g : b+d+f+h.$$

Luego,

4ª. *Si una proporción está formada de tres ó más razones iguales, entonces un antecedente será á su consecuente, como la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consecuentes.*

Sea $a : b :: c : d \quad (1)$,

y $x : y :: m : n \quad (2)$.

De (1) y (2) tendremos : $ad=bc \quad (3)$.

$xn=ym \quad (4)$.

Multiplicando (3) por (4): $(ax)(dn)=(by)(cm) \quad (5)$.

Dividiendo (3) entre (4): $\left(\frac{a}{x}\right)\left(\frac{d}{n}\right)=\left(\frac{b}{y}\right)\left(\frac{c}{m}\right) \quad (6)$.

Pero de (5) : $ax : by :: cm : dn$.

Pero de (6) : $\frac{a}{x} : \frac{b}{y} :: \frac{c}{m} : \frac{d}{n}$.

De donde,

5ª. *Si dos proporciones se multiplican ó dividen término á término, resultará proporción.*

Sea $a : b :: c : d \quad (1)$,

y $a : b :: c : d \quad (2)$.

Multiplicando término á término : $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$ (3).

Y extrayendo la raíz cuadrada de (3) : $a : b :: c : d$.

6ª. *Si en una proporción se llevan todos sus términos á una misma potencia, ó se les extrae una misma raíz, siempre subsistirá la proporción.*

SERIES.

234. *Serie* es una sucesión de términos, cada uno de los cuales se forma de uno ó más de los precedentes términos, siguiendo una ley fija. Las series mas sencillas son la Progresión Aritmética y la Progresión Geométrica.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA.

235. *Progresión Aritmética* es una serie en que cada término se forma del precedente agregándole una cantidad constante, que se llama *común diferencia.*

Cuando la común diferencia es *positiva,* cada término es mayor que el precedente; y la progresión entonces se dice que es *creciente.* Cuando la común diferencia es *negativa,* cada término es menor que el precedente, y la progresión es entonces *decreciente.*

a su + (n−1)d; la diferencia igual = con $\frac{u-a}{n-1}$

Así, 2, 4, 6, 8, etc., es una progresión creciente, en la cual la común diferencia es 2; y 8, 6, 4, 2 es una progresión decreciente, en la cual la común diferencia es −2.

236. En una progresión aritmética, hay que considerar especialmente cinco cantidades, que son: *Su primer término, su último término, la común diferencia, el número de términos* y *la suma de ellos.* Dadas tres de estas cantidades se pueden encontrar las otras dos. Las representaremos así:

Por a............ el primer término.
" u............ el último.
" n............ el número de términos.
" d............ la común diferencia.
" s............ la suma.

237. El primero y el último término se llaman *extremos*, y los demás, *medios aritméticos.*

Dados a, d y n, hallar u.

238. El segundo término es, según la definición, igual á $a+d$; el tercero es igual al segundo aumentado con d, ésto es, $a+2d$; el cuarto es igual al tercero aumentado con d, es decir, $a+3d$, y así de los demás: de donde el término *u*, es igual á

$$a+(n-1)d;$$
$$u=a+(n-1)d \quad (1).$$

Es decir, *que cualquier término es igual al primer término, más el producto de la común diferencia por el número de términos precedentes.*

EJEMPLOS.

1. El 1ʳ término es 3, y la común diferencia 3. ¿Cuál será el 7º término?

El número de términos precedentes á 7 es 6; de de donde, por la regla: el 7º término es $3+3\times6=21$.

2. Primer término 24; común diferencia −3; ¿cuál es el 5º término?

Resp.: $24+4\times-3=12$

La suma es = $\frac{a+u}{2}n$; último o cualquier término ... el término es igual

Dados a, n y d hallar s.

239. Sea $\div a.b.c.e....r.q.t.u$

la progresión aritmética cuya suma se quiere determinar.

Si con arreglo á lo que acabamos de ver respecto á la formación de los términos, calculamos éstos y sumamos dos á dos los equidistantes de los extremos; ésto es 1º con último, 2º con penúltimo y así sucesivamente, resultará:

$$\begin{array}{ll} a=a & b=a+d \\ u=a+(n-1)d & t=a+(n-2)d \\ \hline a+u=2a+(n-1)d & b+t=2a+(n-1)d \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c=a+2d.... \\ q=a+(n-3)d.... \\ \hline c+q=2a+(n-1)d.... \end{array}$$

y por consiguiente:

$$a+u=b+t=c+q=e+r=....$$

es decir, que la suma de dos términos cualesquiera equidistantes de los extremos es igual constantemente á la suma de dichos extremos.

Ahora bien,

$$s=a+b+c+....+q+t+u$$

invirtiendo el orden

$$s=u+t+q+....+c+b+a$$

sumando ambas ecuaciones miembro á miembro:

$$2s=(a+u)+(b+t)+(c+q)+....+(q+c)+(t+b)+(u+a).$$

Y como todas las sumas parciales son iguales á $(a+u)$, y hay tantas como términos tiene la progresión, se tendrá

$$2s=n(a+u), \text{ de donde despejando s}$$
$$s=\tfrac{1}{2}n(a+u) \quad (2).$$

Si en esta ecuación se sustituye u por su igual $a+(n-1)d$, obtendremos:

$$s=\tfrac{1}{2}n(a+a+(n-1)d)=na+\frac{n(n-1)}{2}d \quad (3)$$

por medio de la cual puede hallarse directamente la suma de los términos sin necesidad de calcular á u.

EJEMPLOS.

1. a=2 ; d=3 ; número de términos 17. ¿Cuál es la suma? Resp.: $17\times2+\frac{17\times16}{2}\times3=442$.

2. $a=\frac{1}{2}$; $d=-\frac{1}{8}$; número de términos 20. ¿Cuál es la suma? Resp. : $20\times\frac{1}{2}+\frac{20\times19}{2}\times-\frac{1}{8}=-\frac{55}{4}$.

3. a=5; d=3; términos 12. ¿Cuál es la suma? Resp.: 258.

4. a=−2 ; d=−3 ; número de términos 10. ¿Cuál es la suma? Resp. : −155.

Las fórmulas (1) y (2) contienen las cinco cantidades: a, d, n, u, s. Tomándose por consiguiente tres cualesquiera de ellas, pueden encontrarse las otras dos.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

240. *Progresión Geométrica* es una serie, en que cada término se forma del precedente, multiplicado por una cantidad fija, que se llama *razón* de la progresión.

Cuando el primer término es positivo y la razón mayor que 1, cada término es mayor que el precedente, y la progresión es *creciente.* Cuando la razón es menor que 1, cada término es menor que el precedente, y la progresión es *decreciente.*

Así, 2, 4, 8, 16, etc., es una progresión creciente cuya razón es 2.

Y 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etc., es una progresión decreciente, cuya razón es $\frac{1}{2}$.

Cuando la razón es negativa, los términos de la progresión son alternativamente positivos y negativos. Los términos positivos forman una progresión cuya razón es igual al cuadrado de la razón dada ; y los negativos, otra progresión que tiene por razón también el cuadrado de la razón dada.

Así, 2, −4, +8, −16, etc., cuya razón es −2, da las progresiones 2, 8, 32, etc., y −4, −16, −64. etc., cuya razón en ambos casos es 4.

241. Como en la progresión aritmética, hay en la geométrica cinco cantidades, dadas tres de las cuales, se encuentran las otras dos. Las representaremos

Por a.............. el primer término.
" u.............. el último término.
" n.............. el número de términos.
" r.............. la razón.
" s.............. la suma de los términos.

242. Llámanse *extremos*, el 1° y último términos, y todos los demás, *medios geométricos.*

Dados a, r y n, hallar u.

243. El segundo término es, según la definición, igual al primero multiplicado por r, es decir, que es igual á *ar* ; el tercero, es igual al segundo, multiplicado por r, ésto es, igual á ar^2 ; el cuarto es igual al tercero multiplicado por r, ó ar^3, y así de los demás, hasta que el último u, ó n° término es igual á ar^{n-1} ; de donde,

$$u=ar^{n-1}.... \quad (1).$$

Es decir, *que cualquier término de una progresión geométrica es igual al primer término, multiplicado por la potencia de la razón cuyo exponente es igual al número de términos precedentes.*

EJEMPLOS.

1. Hallar el 7° término de la serie 1, 4, 16, etc. Tendremos : $u=ar^{n-1}=1\times4^6=4096$.

2. Hallar el 8° término de la serie 2, 4, 8, etc. Resp. : 256.

3. Hallar el 5° término de la serie 2, 6, 18, etc. Resp. : 162.

4. Hallar el 4º término de la serie 1, 5, 25, etc. Resp.: 125.

Dados a, r y n, hallar s.

244. Tenemos de la definición

$$s=a+ar+ar^2+\dots ar^{n-2}+ar^{n-1};$$

y multiplicando suma por razón:

$$rs=ar+ar^2+\dots ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n.$$

Restando la primera ecuación de la segunda, miembro á miembro, tendremos:

$rs-s=ar^n-a$, que descompuesta en factores dá $s(r-1)=a(r^n-1)$ de donde,

$$s=\frac{a(r^n-1)}{(r-1)} \quad (2).$$

Si hubiéramos restado la segunda ecuación de la primera habría resultado:

$s-rs=a-ar^n$, de donde, descomponiendo en factores,

$$s(1-r)=a(1-r^n),$$

$$\text{ó } s=a\frac{(1-r^n)}{1-r} \quad (3).$$

245. Cuando r es mayor que 1 es más conveniente emplear la fórmula (2); y cuando r es menor que 1, la fórmula (3); pero una ú otra puede usarse en ambos casos.

EJEMPLOS.

1. Hallar la suma de 8 términos de la serie 5, 20, 80, etc. Resp.: $s=a\frac{r^n-1}{r-1}=5\times\frac{4^8-1}{4-1}=109225.$

2. Hallar la suma de 6 términos de la serie 64, 32, 16. Resp.: 126.

3. Hallar la suma de 8 términos de la serie 2, -4, $+8$, -16, etc. Resp.: -170.

4. Hallar la suma de 7 términos de la serie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$. Resp.: $\frac{2059}{1458}$.

LOGARITMOS.

246. *Logaritmo* de un número, es el exponente de la potencia á que es necesario elevar un número fijo para producir el número dado. El número fijo se llama *base del sistema*.

247. Si denotamos un número positivo cualquiera, excepto 1, por a; otro positivo por n, y por x el exponente de la potencia á que es necesario elevar á a, para que produzca á n, tendremos la ecuación exponencial

$$a^x=n \quad (1).$$

En esta ecuación, a es la base, n cualquier número positivo, y x el logaritmo de n. Es claro que a no puede ser negativo, ni puede ser igual á 1, por que todas las potencias de 1 son iguales á 1.

248. Si, mientras que a permanece invariable, suponemos que n varía desde 0 hasta ∞, los correspondientes valores de x, tomados juntamente constituirán lo que se llama *un sistema de logaritmos*. Y puesto que es infinito el número de valores que puede asignarse á *a*, se sigue que hay un infinito número de *sistemas de logaritmos*. De éstos, sólo dos tienen un uso general; el sistema que tiene por base á 10, y que se llama *sistema común*, y el llamado *sistema de Napier*, que tiene por base 2, 718281828....

249. Si hacemos $a=10$, en la ecuación (1), tendremos la ecuación

$$10^x=n\dots \quad (2).$$

Cuando n es igual á 1 en la ecuación (2), el correspondiente valor de x será 0. Cuando n es igual á 10, el valor correspondiente de x será 1. Cuando $n=100$, será $x=2$, y así en adelante. De modo que

logaritmo de $1=0$
" $10=1$
" $100=2$
" $1000=3$, etc.

250. Para todos los valores de n entre 1 y 10 los logaritmos correspondientes estarán entre 0 y 1; es decir, que

son fracciones menores que 1, y regularmente se expresan con decimales. Para los valores de n, entre 10 y 100, los logaritmos correspondientes estarán entre 1 y 2; es decir, 1 más un decimal. Los logaritmos de todos los números entre 100 y 1000, estarán entre 2 y 3, es decir, 2 más un decimal. En general, un logaritmo se compone de dos partes, la *entera* que se llama *característica*, y la *decimal* que se llama *mantisa*.

251. Empléanse los logaritmos para facilitar el cálculo de los números, convirtiendo las operaciones de multiplicar y dividir en sumar y restar. Los siguientes principios indican el método de aplicar los logaritmos á las operaciones aritméticas:

Principios Generales.

252. Sea a la base, m, n dos números y x, y sus logaritmos. Tendremos de la ecuación (1).

$$a^x = m \quad (3)$$
$$a^y = n \quad (4).$$

Multiplicando (3) por (4) miembro á miembro tendremos:

$$a^{x+y} = mn.$$

Luego, de la definición,

$$x + y = \text{log. de } mn \quad (5).$$

Es decir, *que el logaritmo del producto de dos números es igual á la suma de los logaritmos de los dos números.*

253. Si dividimos (3) entre (4) miembro á miembro, tendremos:

$$a^{x-y} = \frac{m}{n}.$$

Luego, de la definición,

$$x - y = \text{log. de } \frac{m}{n} \quad (6).$$

Es decir, *que el logaritmo del cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el del divisor.*

254. Si elevamos ambos números en (3) á cualquier potencia denotada por p, tendremos,

$$a^{px} = m^p.$$

Luego, de la definición,

$$px = \text{log. de } m^p \quad (7).$$

Es decir, *que el logaritmo de cualquier potencia de un número es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.*

255. Si extraemos cualquier raíz de ambos números en (3), denotada por r, tendremos,

$$a^{\frac{x}{r}} = \sqrt[r]{m}.$$

Luego, de la definición,

$$\frac{x}{r} = \text{log. de } \sqrt[r]{m} \quad (8).$$

Es decir, *que el logaritmo de cualquier raíz de un número es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz.*

256. Para la aplicación de los principios anteriores se requiere una tabla de logaritmos. *Tabla de logaritmos*, es una tabla por medio de la cual se puede encontrar el logaritmo correspondiente á cualquier número.

Reduciendo á reglas prácticas lo anterior tendremos.

Reglas.

1ª. Hallar el producto de dos ó más factores.

Búsquense en la tabla los logaritmos de los factores, y súmense: búsquese el número correspondiente al logaritmo igual á esta suma, y ese número será el producto requerido.

2ª. Hallar el cociente de un número entre otro.

Búsquense los logaritmos de dividendo y divisor y réstese el de éste del de aquél; búsquese el número correspondiente al logaritmo igual á la diferencia, y ese número será el cociente requerido.

3ª. Elevar un número á cualquier potencia.

Búsquese el logaritmo del número y multiplíquese por el exponente de la potencia: búsquese el número correspondiente al logaritmo igual á este producto, y ese número será la potencia requerida.

4ª. Extraer una raíz cualquiera de un número.

Búsquese el logaritmo del número y divídase por el índice de la raíz: búsquese el número correspondiente al logaritmo igual al cociente, y ese número será la raíz requerida.

TABLA I.—LOGARITMOS DE 1 Á 100.

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1.	0.000000	26.	1.414973	51.	1.707570	76.	1.880814
2.	0.301030	27.	1.431364	52.	1.716003	77.	1.886491
3.	0.477121	28.	1.447158	53.	1.724276	78.	1.892095
4.	0.602060	29.	1.462398	54.	1.732394	79.	1.897627
5.	0.698970	30.	1.477121	55.	1.740363	80.	1.903090
6.	0.778151	31.	1.491362	56.	1.748188	81.	1.908485
7.	0.845098	32.	1.505150	57.	1.755875	82.	1.913814
8.	0.903090	33.	1.518514	58.	1.763428	83.	1.919078
9.	0.954243	34.	1.531479	59.	1.770852	84.	1.924279
10.	1.000000	35.	1.544068	60.	1.778151	85.	1.929419
11.	1.041393	36.	1.556303	61.	1.785330	86.	1.934498
12.	1.079181	37.	1.568202	62.	1.792392	87.	1.939519
13.	1.113943	38.	1.579784	63.	1.799341	88.	1.944483
14.	1.146128	39.	1.591065	64.	1.806180	89.	1.949390
15.	1.176091	40.	1.602060	65.	1.812913	90.	1.954243
16.	1.204120	41.	1.612784	66.	1.819544	91.	1.959041
17.	1.230449	42.	1.623249	67.	1.826075	92.	1.963788
18.	1.255273	43.	1.633468	68.	1.832509	93.	1.968483
19.	1.278754	44.	1.643453	69.	1.838849	94.	1.973128
20.	1.301030	45.	1.653213	70.	1.845098	95.	1.977724
21.	1.322219	46.	1.662758	71.	1.851258	96.	1.982271
22.	1.342423	47.	1.672098	72.	1.857333	97.	1.986772
23.	1.361728	48.	1.681241	73.	1.863323	98.	1.991226
24.	1.380211	49.	1.690196	74.	1.869232	99.	1.995635
25.	1.397940	50.	1.698970	75.	1.875061	100.	2.000000

TABLA II.—LOGARITMOS DE NÚMEROS SIN LA CARACTERÍSTICA.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100.	000000	000434	000868	001301	001734	002166	002598	003030	003461	003891
101.	004321	004751	005181	005609	006038	006466	006894	007321	007748	008174
102.	008600	009026	009451	009876	010300	010724	011147	011570	011993	012415
103.	012837	013259	013680	014100	014521	014940	015360	015779	016197	016616
104.	017033	017451	017868	018284	018700	019116	019532	019947	020361	020775
105.	021189	021603	022016	022428	022841	023252	023664	024075	024486	024896
106.	025306	025715	026125	026533	026942	027350	027757	028164	028571	028978
107.	029384	029789	030195	030600	031004	031408	031812	032216	032619	033021
108.	033424	033826	034227	034628	035029	035430	035830	036230	036629	037028
109.	037426	037825	038223	038620	039017	039414	039811	040207	040602	040998

En la Tabla I se han dado los logaritmos con las características, en columnas adyacentes á las de los números.

En la Tabla II, cada cifra de la casilla superior puede agregarse á cualquier número de la columna de la izquierda; el logaritmo del número así formado se encontrará á la derecha del número y debajo de la cifra de la casilla superior que se le agregó. A ese logaritmo decimal ó *mantisa*, se le agregará la característica que corresponda.

Para hallar, por ejemplo, el logaritmo de 1099, se agrega al 109 el 9 de arriba, así: 1099. Su logaritmo se hallará á la derecha de 109 y debajo del 9: será 040998, y agregándole la característica de 1000 que es 3, se tendrá 3,040998 logaritmo pedido.

ÍNDICE.

Felipe Villanueva Calvillo

Leonor Lee

LA CIENCIA, QUE ES EL SABER MÁS ÚTIL, PUESTA AL ALCANCE DE LOS NIÑOS.

Cartillas Científicas:

NOCIONES DE FÍSICA. Por BALFOUR STEWART, F. R. S. 20 centavos.

NOCIONES DE QUÍMICA. Por H. E. ROSCOE, F. R. S. 20 centavos.

NOCIONES DE FISIOLOGÍA. Por el Dr. M. FOSTER, F. R. S. 20 centavos.

NOCIONES DE ASTRONOMÍA. Por J. NORMAN LOCKYER, F. R. S. 20 centavos.

NOCIONES DE GEOGRAFÍA FÍSICA. Por A. GEIKIE, F. R. S. 20 centavos.

NOCIONES DE GEOLOGÍA. Por A. GEIKIE, F. R. S. 20 centavos.

NOCIONES DE ECONOMÍA POLÍTICA. Por W. S. JEVONS. 20 centavos.

NOCIONES DE BOTÁNICA. Por Dr. J. D. HOOKER. 20 centavos.

NOCIONES DE LÓGICA. - . Por JEVONS. 30 centavos.

NOCIONES DE GEOMETRÍA INVENTIVA. Por W. J. SPENCER. 20 centavos.

NOCIONES DE GEOGRAFÍA CIENTÍFICA. Por GEORGE GROVE. 30 centavos.

Cartillas Historicas:

NOCIONES DE HISTORIA DE EUROPA. Por E. A. FREEMAN. 30 centavos.

NOCIONES DE HISTORIA DE GRECIA. Por C. A. FYFFE. 30 centavos.

NOCIONES DE HISTORIA DE ROMA. Por C. CREIGHTON. 30 centavos.

NOCIONES DE ANTIGÜEDADES ROMANAS. Por A. S. WILKINS. 30 centavos.

NOCIONES DE ANTIGÜEDADES GRIEGAS. Por J. H. MAHAFFY. 30 centavos.

NOCIONES DE GEOGRAFÍA ANTIGUA. Por TOZER. 30 centavos.

PUBLICADOS POR D. APPLETON Y CÍA., NUEVA YORK.

Leonor Lee

Libro Primario de Appleton, para enseñar á leer según los métodos modernos. Arreglado por varios profesóres españoles é hispanoamericanos.

Forma un hermoso libro, con láminas finísimas, está impreso en buen papel y profusión de tipos distintos.

Creemos firmemente que el presente libro *para enseñar á leer*, es el único y el mejor en idioma castellano. Un tomo de 48 páginas, 30 centavos.

El Lector Americano. Nuevo Curso Gradual de Lecturas. Por J. A. NÚÑEZ.

Consta de: I. EL SILABARIO. 10 centavos.
II. EL LIBRO PRIMERO. 25 centavos.
III. EL LIBRO SEGUNDO. 35 centavos.
IV. EL LIBRO TERCERO. 50 centavos.

Arreglado para el uso de las escuelas hispanoamericanas.

Nuestra edición contiene la Ortografía de la Academia Española y nuevas láminas y está bonitamente encuadernado, el Silabario con cubierta de papel muy grueso, y encartonados los demás.

Libros de Lectura de Mándevil. LIBRO PRIMARIO PARA EL USO DE LOS NIÑOS. Por el Doctor ENRIQUE MÁNDEVIL.

Un tomo de 95 páginas, con láminas, en 12°. Nueva edición, enteramente corregida y con grabados nuevos. 15 centavos.

LIBRO SEGUNDO. Por el Doctor ENRIQUE MÁNDEVIL.

Un tomo de 128 páginas en 12°. 20 centavos.

LIBRO TERCERO DE LECTURA. Por el Doctor ENRIQUE MÁNDEVIL.

Un tomo en 12°, constando de más de 245 páginas. 30 centavos.

El Nuevo Mándevil. LIBRO PRIMERO, para uso en las escuelas del Río de la Plata, compuesto según el método racional de *Lectura y Escritura simultáneas*, por D. TRINIDAD S. OSUNA, Inspector general de escuelas de la provincia de Buenos Aires.

Un tomo de 200 páginas en 12°, con numerosos grabados. 40 centavos.

MÉTODO DE LECTURA GRADUAL. Por DOMINGO F. SARMIENTO.

Un tomo de 64 páginas en 18°, con 40 láminas. 15 centavos.

El Nuevo Libro Primario de los Niños. Cartilla adornado con 6 preciosas láminas iluminadas. Un Alfabeto en Mayúsculas y Minúsculas impreso á dos tintas.

Un tomo de 14 páginas, con cubierta de papel encartonado y bonitamente iluminada. La docena, $1.50.

EL NUEVO LIBRO PRIMERO DE LOS NIÑOS, llamado también Libro del Gato, que acabamos de publicar y que está destinado á remplazar el antiguo, está dispuesto en *Ejercicios* y *Lecciones*.

PUBLICADOS POR D. APPLETON Y CÍA., NUEVA YORK.

MECÁNICA, AGRICULTURA Y GIMNASIA.

Principios Generales de Mecánica. Por el Dr. Darío González, director del Instituto Nacional de San Salvador y autor de varias obras didácticas.

ADOPTADA COMO OBRA DE TEXTO EN VARIOS PAÍSES.

Esta obrita no tiene otro carácter que el de una introducción al estudio de la Física; pero una introducción necesaria y de suma utilidad. Forma un bonito tomo impreso en papel fino y con muchos grabados apropiados al texto. 50 centavos.

Agricultura Científica, Principios Elementales de. Por N. T. Lupton, Profesor de Química en la Universidad "Vanderbilt" de Nashville.

Escrita en un lenguaje claro y fácil de entender por los jóvenes.

Es obra que no sólo tiene aplicación en la escuela, sino que debería ser leída por cuantos se ocupen de labores agrícolas.

Contiene: El origen, composición, y clasificación de los terrenos; La composición de las plantas; Composición y propiedades de la atmósfera; El cuidado de los ganados; La manera de mejorar la condición de los terrenos y multitud de materias relativas á la Agricultura como ciencia y como arte.

Clasificada y en orden numérico, con lenguaje sencillo y una tabla de preguntas útil y fácil de ser empleada por los maestros en general.

Un tomo encartonado, uniforme con nuestras otras Cartillas, de más de 100 páginas. 30 centavos.

Ejercicios Gimnásticos. Escogidos por H. R. Lemly, oficial de Artillería, ex-Comandante de Cadetes, etc., etc.

Contiene: Instrucciones generales; Ejercicios para el Desarrollo y Agilidad del Cuerpo; Las Palanquetas; Las Mazas: El Trapecio; Las Argollas; El Saco de Pugilato. Todos los Ejercicios están ilustrados con numerosos grabados.

Un toma de 81 páginas, encartonado. 30 centavos.

Publicados por D. APPLETON Y CÍA., Nueva York.

Leonor Lee